

UN ELEMENT FINIT PATRULATER HIBRID DE TENSIUNE PENTRU PROBLEME DE ELASTICITATE PLANĂ

Şef lucr. ing. Dosa Adam*

Rezumat: În această lucrare se prezintă un element finit patrulater hibrid de tensiune pentru probleme de elasticitate plană. Elementul are rang corect și trece testele de deformare constantă. Exemplele numerice arată performanțele ridicate și sensibilitatea redusă la distorsiunile de formă a acestui element în comparație cu rezultatele obținute cu alte elemente de acest tip.

Abstract: This paper presents a quadrilateral stress-hybrid finite element for plane elasticity problems. The element has correct rank and passes the constant strain tests. The numerical examples show high performances and a low distortion sensitivity for this element in comparison with other elements of this type.

1. Introducere

Elementele finite de tip patrulater cu patru noduri folosite în modelarea problemelor de elasticitate plană prezintă o sensibilitate ridicată la distorsiunea de formă. Convergența nesatisfăcătoare a acestor elemente a atras eforturi de cercetare considerabile în ultimele decenii. Atenția s-a concentrat asupra eliminării diverselor forme de energie excesivă care conduc la blocaje („locking”) și asupra dezvoltării unor formulări care nu depind de abaterea de formă a elementelor față de forma dreptunghiulară/paralelogram.

Multe din aceste formulări dau aproximații bune pentru anumite probleme, dar slabe pentru altele. Majoritatea elementelor, dacă nu toate dau o acuratețe excelentă în problemele de bară încovoiată, dacă se folosesc rețele de discretizare dreptunghiulare. Dacă însă se utilizează rețele trapezoidale, precizia scade dramatic. Această deteriorare uneori este numită blocare trapezoidală. Așa cum se arată în [1], în condițiile reproducerii corecte a deformațiilor constante, elementul patrulater de membrană cu patru noduri având numai deplasări liniare, nu poate evita blocarea trapezoidală. În ciuda acestei limitări, în literatura de specialitate s-au publicat elemente care dau o aproximație foarte bună, sau chiar sunt exacte la încovoiere chiar și în cazul forme trapezoidale. Aceste elemente exploatează de exemplu o violare a comportării de deformare constantă [4], sau alterează rigiditatea la încovoiere pe o direcție, pentru a se obține precizia la încovoiere pe direcția cealaltă [3]. Blocajul trapezoidal a fost un stimul important în dezvoltarea formulării Allman-Cook a elementelor de membrană cu rotiri de noduri [5, 6].

Această lucrare își propune realizarea unui element finit patrulater de membrană cu patru noduri cu deplasări liniare, care să respecte toate condițiile de deformare constantă și rigiditate corectă, având precizie cât mai apropiată de limitele acestei configurații.

* Universitatea TRANSILVANIA Brașov, Facultatea de Construcții, Catedra de Construcții,
e-mail: adamd@rdslink.ro

2. Discretizarea în elemente finite

Se consideră un corp elastic plan având volumul V^c acționat de forțele de contur \hat{t} pe o parte S_i^c din frontieră și având condiții de rezemare specificate prin deplasările \hat{u} pe porțiunea S_u^c a suprafeței. Corpul se dividează în elemente de tip patrulater. Elementele se consideră conectate numai la noduri. În interiorul fiecărui element se definesc câmpuri de tensiune în mod independent, iar deplasările pe conturul fiecărui element se consideră definite prin deplasările nodurilor adiacente. În urma discretizării V^c, S_i^c și S_u^c se aproximează prin V^d, S_i^d și S_u^d . Trebuie remarcată apariția unei frontiere interioare S_i^d .

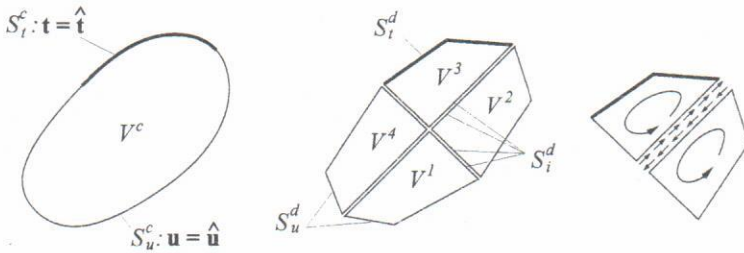


Figura 1. Discretizarea în elemente finite

$$\begin{aligned} V^c &\cong V^d = \sum V^e, \\ S^c &= S_i^c + S_u^c \cong S_i^d + S_u^d, \\ S^d &= S_i^d + S_u^d + S_i^e = \sum S^e. \end{aligned} \quad (1)$$

La limită prin rafinarea discretizării $V^d \rightarrow V^c$, $S_i^d + S_u^d \rightarrow S^c$, iar dacă tensiunile devin continue între elemente, integralele de contur se anulează între elementele vecine prin parcurgerea de două ori a porțiunii de frontieră V^e comune în sensuri contrare. Astfel integrala pe conturul elementelor tinde către integrala pe S^c .

3. Formularea elementului finit

Se consideră că elementul este alcătuit dintr-un material caracterizat prin matricea C , care leagă deformațiile de tensiuni. În cazul izotrop avem:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = C \sigma = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & 1/E & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu)/E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (2)$$

Aici E este modulul de elasticitate longitudinal, iar ν este coeficientul Poisson. Grosimea h se consideră constantă pe fiecare element în parte. Pentru simplitate presupunem că nu există forțe de volum ci numai forțe distribuite pe conturul elementului.

3.1. Caracteristici geometrice

Se consideră patrulaterul din figura 1. Coordonatele nodurilor în reperul global xy sunt:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Punctele A, B, C, D reprezintă mijlocul laturilor elementului, iar punctul E este mijlocul diagonalei $1-3$. Centrul θ al elementului se definește ca intersecția medianelor AC și BD .

$$x_0 = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4), \quad y_0 = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4). \quad (4)$$

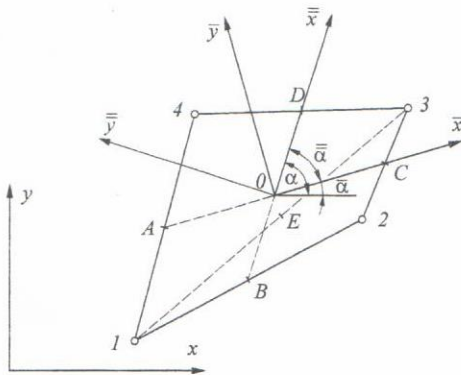


Figura 2. Elementul dreptunghiular cu patru noduri – caracteristici geometrice

Punctul θ coincide cu centrul de greutate al elementului numai în cazul forme de paralelipiped sau dreptunghi.

În cadrul lucrării se folosesc două repere ortogonale suplimentare având originea în punctul θ , care reprezintă centrul elementului. Reperul $\bar{x}\bar{y}$ are axa \bar{x} orientată pe direcția medianei AC , iar reperul $\bar{x}\bar{y}$ are axa \bar{x} orientată pe direcția medianei BD .

Se definesc vectorii:

$$\mathbf{v}_{13} = \begin{Bmatrix} x_{31} \\ y_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{Bmatrix} \quad \text{și} \quad \mathbf{v}_{24} = \begin{Bmatrix} x_{42} \\ y_{42} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_4 - x_2 \\ y_4 - y_2 \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

Suprafața elementului este:

$$A_e = \frac{1}{2} \det[\mathbf{v}_{13} \mathbf{v}_{24}]. \quad (6)$$

3.2. Câmpul de tensiuni

În interiorul fiecărui element adoptăm următorul câmp de tensiuni :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{\bar{x}} \\ \sigma_{\bar{y}} \\ \tau_{\bar{x}\bar{y}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \bar{y} & \bar{y} \cos^2 \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \bar{y} \sin^2 \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \bar{y} \sin \alpha \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

Sau

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} \boldsymbol{\beta}. \quad (7')$$

Aici $\boldsymbol{\beta}$ fiind vectorul care conține cei 5 parametri care definesc câmpul de tensiuni. Primii trei parametri β_1, β_2 și β_3 definesc câmpuri de tensiune constantă pe element. Parametrii β_4 și β_5 definesc câmpuri neuniforme de tensiuni. Pentru simplitate, la exprimarea acestor tensiuni s-a adoptat reperul $\bar{x}\bar{y}$. Coloana 4 din \mathbf{S} reprezintă tensiunile $\sigma_{\bar{y}} = \bar{y}\beta_4$ rezultate din încovoiere având ca axă \bar{x} . Coeficienții din coloana 5 a matricei \mathbf{S} reprezintă tensiunea $\sigma_{\bar{y}} = \bar{y}\beta_5$ de încovoiere în lungul axei \bar{x} .

Se observă că matricea \mathbf{S} se poate partiționa în felul următor:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{I}_3 \mathbf{S}_n]. \quad (8)$$

Ținând cont de cele 3 grade de libertate de solid rigid ale elementului, rezultă că alegerea de mai sus a câmpului de tensiuni reprezintă numărul minim de parametri necesari pentru a obține un element de rang corect. (4 noduri \times 2 gdl / nod = 8 = 5 parametri + 3 gdl rigide). Se poate vedea că în absența forțelor de volum, câmpul de tensiuni (5) este în echilibru.

$$\begin{cases} \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} = 0 \\ \sigma_{y,y} + \tau_{yx,x} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

3.2. Câmpul de deplasări

După cum se va vedea în continuare, în cazul elementelor hibride la care câmpul de tensiune adoptat respectă condițiile de echilibru în interiorul elementului, nu este necesară cunoașterea câmpului de deplasări decât pe frontiera elementului. Se consideră o variație liniară a deplasărilor în lungul laturilor, adică deplasările unui punct de pe o latură se obțin prin interpolarea liniară a deplasărilor nodurilor de la capetele laturii. Relația se poate scrie formal:

$$\mathbf{d} = \mathbf{P} \mathbf{u}. \quad (10)$$

Aici $\mathbf{u} = (u_{x1} \ u_{y1} \ u_{x2} \ u_{y2} \ u_{x3} \ u_{y3} \ u_{x4} \ u_{y4})^T$ reprezintă deplasările nodurilor, iar $\mathbf{d} = (d_x \ d_y)^T$ sunt deplasările în lungul laturilor elementului.

3.4. Exprimarea relațiilor de echilibru și a condițiilor la limită

În continuare vom exprima echilibrul sistemului discret cu ajutorul principiului lucrului mecanic virtual.

Pe conturul elementelor se dezvoltă tracțiuni. Tracțiunile sunt forțe distribuite pe contur, orientate după direcțiile sistemului de referință xy . Ele se obțin din tensiunile de pe laturile elementului, ținând cont de orientarea reperului format din normala și tangenta la latură. În cazul laturilor paralele cu axele de coordonate tracțiunile se obțin simplu din tensiuni ținând cont de orientarea normalei exterioare. În cazul general se folosește o matrice de transformare:

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (11)$$

sau scris mai compact:

$$\mathbf{t} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}. \quad (11')$$

Aici \mathbf{Q} conține componentele normalei \mathbf{n} pe latură în punctul considerat. Ținând cont de (7') rezultă :

$$\mathbf{t} = \mathbf{Q} \mathbf{S} \boldsymbol{\beta}. \quad (12)$$

Tensiunile $\boldsymbol{\sigma}$ și tracțiunile $\mathbf{t} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}$ considerate forțe exterioare își fac echilibrul, ceea ce înseamnă că pentru orice câmp virtual de tensiuni $\delta\boldsymbol{\sigma}$ lucrul mecanic trebuie să fie nul. Pentru un câmp oarecare $\delta\boldsymbol{\sigma}$, avem o relație de tipul lucrul mecanic al eforturilor = lucrul mecanic exterior.

$$\int_V \delta\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_S \delta\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{d} dS. \quad (13)$$

Se consideră că pentru câmpurile virtuale sunt valabile aceleași tipuri de relații ca și pentru cele reale. Ținând cont de (7), (10) și de relația lui Hooke (2) rezultă:

$$\delta\boldsymbol{\beta}^T \left(\int_V \mathbf{S}^T \mathbf{C} \mathbf{S} dV \right) \boldsymbol{\beta} = \delta\boldsymbol{\beta}^T \left(\int_S \mathbf{Q}^T \mathbf{P} dS \right) \mathbf{u}. \quad (14)$$

Aici integralele se referă la volumul și respectiv conturul tuturor elementelor.

Relația (14) asigură și îndeplinirea condițiilor la limită în deplasări prin faptul că deplasările \mathbf{d} introduc restricțiile cinematice impuse asupra deplasărilor nodurilor. Această relație mai trebuie completată cu condițiile de contur exprimate în tensiuni. În cazul sistemului discret nu există o corespondență punctuală între tracțiunile \mathbf{t} rezultate din câmpul intern de tensiuni și forțele de contur exterioare \mathbf{t} . Aceste condiții sunt îndeplinite numai într-o manieră globală și se pot exprima tot cu ajutorul principiului lucrului mecanic virtual.

Pentru un câmp oarecare $\delta\mathbf{d}$ avem:

$$\int_S \delta\mathbf{d}^T (\mathbf{t} - \mathbf{i}) dS = 0, \quad (15)$$

din care rezultă :

$$\delta \mathbf{u}^T \left(\int_S \mathbf{P}^T \mathbf{Q} \mathbf{S} dS \right) \boldsymbol{\beta} - \delta \mathbf{u}^T \left(\int_S \mathbf{P}^T \cdot \dot{\mathbf{t}} dS \right) = 0. \quad (16)$$

Introducând notațiile:

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{S}^T \mathbf{C} \mathbf{S} dV, \quad \mathbf{L} = \int_S \mathbf{P}^T \mathbf{Q} \mathbf{S} dS, \quad \mathbf{f} = \int_S \mathbf{P}^T \dot{\mathbf{t}} dS, \quad (17)$$

și ținând cont de faptul că relațiile (14) și (16) trebuie să fie îndeplinite pentru orice $\delta \boldsymbol{\alpha}$ și $\delta \mathbf{u}$, rezultă:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \boldsymbol{\beta} &= \mathbf{L}^T \mathbf{u} \\ \mathbf{L} \boldsymbol{\beta} - \mathbf{f} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Aici

\mathbf{F} este matricea de flexibilitate raportată la parametri de tensiune $\boldsymbol{\beta}$,

\mathbf{L} este o matrice de conexiune și asigură concentrarea tracțiunilor la nodurile elementului,

\mathbf{f} reprezintă vectorul forțelor nodale rezultate din încărcările pe element.

Prin regruparea termenilor relația de mai sus se poate scrie sub formă matriceală:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & -\mathbf{L}^T \\ \mathbf{L} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

Având în vedere că parametri $\boldsymbol{\beta}$ sunt independenți, aceștia se pot elimina la nivelul fiecărui element, obținându-se relații de tipul:

$$\mathbf{L} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (19)$$

sau $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}$.

Matricea

$$\mathbf{k} = \mathbf{L} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{L}^T \quad (20)$$

este matricea de rigiditate a elementului.

3.5. Calculul practic al matricei de rigiditate

Ținând cont de partiționarea (8) a matricei \mathbf{S} a tensiunilor, matricea de flexibilitate \mathbf{F} și matricea de conexiune \mathbf{L} se pot partiționa sub forma :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{F}_{bh} \\ \mathbf{F}_{hb} & \mathbf{F}_h \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = [\mathbf{L}_b \quad \mathbf{L}_h]. \quad (21)$$

$\mathbf{F}_{hb}^T = \mathbf{F}_{bh} = \int_V \mathbf{C} \mathbf{S}_h dV$ reprezintă cuplarea dintre tensiunile constante și cele neuniforme

pe element introduse prin \mathbf{S}_h . Dacă componentele lui \mathbf{S}_h au integrală nulă pe volumul elementului, ceea ce se poate realiza prin translatarea originii reperelor $\bar{x}\bar{y}$ și $\bar{x}\bar{y}$, în centrul de greutate al elementului, atunci $\mathbf{F}_{bh} = \mathbf{0}$. Acest lucru înseamnă că tensiunile neuniforme sunt energetic ortogonale cu cele constante. Chiar dacă nu se realizează această ortogonalitate, experimentele numerice au arătat că neglijarea lui \mathbf{F}_{bh} afectează în măsură neglijabilă precizia rezultatelor.

Prin efectuarea integrării numerice prin descompunerea elementului în triunghiurile 123 și 134 și aplicarea regulii mijlocului laturilor s-a obținut :

$$\mathbf{F}_h = \int_{V^e} \mathbf{S}_h^T \mathbf{C} \mathbf{S}_h dV = \frac{A^e h}{3E} \begin{bmatrix} \bar{y}_B^2 + \bar{y}_E^2 & \bar{y}_E \bar{y}_E (c^2 - vs^2) \\ \text{sim.} & \bar{y}_A^2 + \bar{y}_E^2 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

În relația (22) $c = \cos(\alpha)$ și $s = \sin(\alpha)$, α fiind unghiul dintre axele \bar{x} și \bar{y} din figura 2.

Matricea \mathbf{L}_b concentrează la noduri tracțiunile de pe conturul elementului corespunzătoare tensiunilor constante.

$$\mathbf{L}_b = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} -y_{42} & 0 & y_{31} & 0 & y_{42} & 0 & -y_{31} & 0 \\ 0 & x_{42} & 0 & -x_{31} & 0 & -x_{42} & 0 & x_{31} \\ x_{42} & -y_{42} & -x_{31} & y_{31} & -x_{42} & y_{42} & x_{31} & -y_{31} \end{bmatrix}^T \quad (23)$$

Matricea \mathbf{L}_h concentrează la noduri tracțiunile de pe conturul elementului corespunzătoare tensiunilor neuniforme.

$$\mathbf{L}_h = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} (\bar{y}_3 + \bar{y}_4) \begin{bmatrix} \bar{y}_3 \bar{c} & \bar{y}_3 \bar{s} & -\bar{y}_4 \bar{c} & -\bar{y}_4 \bar{s} & \bar{y}_4 \bar{c} & \bar{y}_4 \bar{s} & -\bar{y}_3 \bar{c} & -\bar{y}_3 \bar{s} \end{bmatrix} \\ (\bar{y}_1 + \bar{y}_4) \begin{bmatrix} -\bar{y}_4 \bar{c} & -\bar{y}_4 \bar{s} & \bar{y}_4 \bar{c} & \bar{y}_4 \bar{s} & -\bar{y}_1 \bar{c} & -\bar{y}_1 \bar{s} & \bar{y}_1 \bar{c} & \bar{y}_1 \bar{s} \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T \quad (24)$$

În relația (24) $\bar{c} = \cos(\bar{\alpha})$, $\bar{s} = \sin(\bar{\alpha})$, $\bar{c} = \cos(\bar{\alpha})$ și $\bar{s} = \sin(\bar{\alpha})$, $\bar{\alpha}$ și $\bar{\alpha}$ fiind unghiurile definite în figura 2.

Ținând cont de relațiile 20, 21, 22, 23 și 24 matricea de rigiditate rezultă sub forma:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_b + \tilde{\mathbf{k}}_h \quad (25)$$

În care:

$$\mathbf{k}_b = \frac{1}{A^e h} \mathbf{L}_b \mathbf{C}^{-1} \mathbf{L}_b^T \quad (26)$$

reprezintă rigiditatea de bază, care permite reprezentarea corectă a modurilor de deformare constantă. Rangul matricei \mathbf{k}_b este 3.

Matricea

$$\tilde{\mathbf{k}}_h = \mathbf{L}_h \mathbf{F}_h^{-1} \mathbf{L}_h^T \quad (27)$$

asigură rangul corect de 5 al matricei de rigiditate a elementului și precizia în reprezentarea modurilor de deformare de ordin superior.

Din păcate matricea $\tilde{\mathbf{k}}_h$ este "contaminată" de modurile de deformare constantă, astfel în final reprezentarea acestor moduri de către matricea \mathbf{k} rezultată prin (25) nu este corectă. Pentru remedierea acestei situații se folosește o proiecție a matricei $\tilde{\mathbf{k}}_h$ pe un subspațiu ortogonalizat cu deplasările corespunzătoare modurilor rigide (translație pe direcția x , y și rotație) și de deformare constantă prin relația:

$$\mathbf{k}_h = \mathbf{O}_h \tilde{\mathbf{k}}_h \mathbf{O}_h \quad (28)$$

cu

$$\mathbf{O}_h = \mathbf{I} - \mathbf{G}_{rc} (\mathbf{G}_{rc}^T \mathbf{G}_{rc})^{-1} \mathbf{G}_{rc}^T = \mathbf{O}_h^T \quad (29)$$

Matricea \mathbf{O}_h este o matrice de proiecție, care asigură eliminarea modurilor rigide și de deformare constantă din $\tilde{\mathbf{k}}_h$. \mathbf{I} este matricea unitate de ordinul 8. \mathbf{G}_{rc} conține deplasările de solid rigid și cele corespunzătoare deformării constante ale elementului.

$$\mathbf{G}_{rc} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -y_1 & x_1 & -y_2 & x_2 & -y_3 & x_3 & -y_4 & x_4 \\ x_1 & 0 & x_2 & 0 & x_3 & 0 & x_4 & 0 \\ 0 & y_1 & 0 & y_2 & 0 & y_3 & 0 & y_4 \\ y_1/2 & x_1/2 & y_2/2 & x_2/2 & y_3/2 & x_3/2 & y_4/2 & x_4/2 \end{bmatrix}^T \quad (30)$$

transpusa

Matricea $\mathbf{k} = \mathbf{k}_b + \mathbf{k}_h$ rezultată este de rang corect, trece de testele de deformare constantă (patch test) și asigură o acuratețe ridicată în reprezentarea modurilor complexe de deformare având o sensibilitate redusă la distorsiunile de formă geometrică a elementului.

4. Exemple numerice

4.1. Test de sensibilitate la distorsiune a formei elementelor

Pentru a studia sensibilitatea la distorsiune a elementelor s-a folosit grinda din figura 3. Aici parametrul e reprezintă măsura în care forma trapezoidală se îndepărtează de forma dreptunghiulară. Rezultatele sunt reprezentate în tabelul 1. S-a urmărit deplasarea verticală a punctului A pentru diverse valori e . Valoarea exactă obținută prin teoria de bară încovoiată este $v_A = 100$. Pentru comparație se dau valori preluate din literatura de specialitate pentru elementul izoparametric bilinear Q4 [], elementul QM6 cu deformații îmbunătățite [] și elementul QE2 []. Pentru elementul propus în această lucrare se dau atât rezultatele obținute prin formularea prezentată cât și unele obținute prin folosirea lui \mathbf{S}_h din relația (8) energetic ortogonal cu câmpurile de deformații constante. În acest din urmă caz la efectuarea integralelor pe suprafața și pe conturul elementelor din relația (17) s-a folosit cuadratura numerică a lui Gauss.

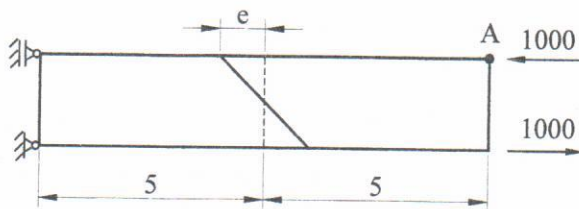


Figura 3. Grindă în consolă, $E = 1500$, $\nu = 1/4$, $h = 1$.

Tabelul 1 Deplasările v_A ale grinzii din figura 3 pentru diverse valori ale distorsiunii „e” ale rețelei de discretizare

e	Q4[10]	QM6[11]	QE2[12]	propus	propus*	exact
0	28,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,5	21,00	80,90	81,20	82,61	81,95	100,00
1	14,10	62,70	63,40	67,21	65,54	100,00
2	9,70	54,40	56,50	70,07	63,77	100,00

* La această variantă s-au folosit câmpuri neuniforme de tensiuni ortogonale cu cele uniforme.

4.2. Problema de membrană a lui Cook

Parametrii structurii sunt dați în figura 4. Rezultatele comparative obținute în funcție de numărul de diviziuni pe o latură sunt date în tabelul 2.

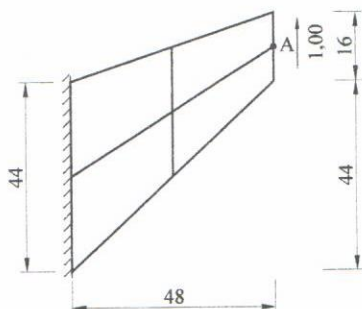


Figura 4. Problema de membrană a lui Cook, $E = 1$, $\nu = 1/3$, $h = 1$.

Tabelul 2. Deplasările v_A pentru problema din figura 4 pentru diverse rețele de discretizare (N: numărul de elemente pe o latură)

N	Q4	QM6	QE2	propus
2x2	11,85	21,05	21,35	21,40
4x4	18,30	23,02	23,02	23,04
16x16	23,43	23,88	23,88	23,88

5. Bibliografie

1. R.H.MacNeal, A theorem regarding the locking of tapered four-noded membrane elements, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **24**, 1793-1799 (1987).
2. R.H.MacNeal, *Finite Elements: Their Design and Performance*, Marcel Dekker: New York, 1994.
3. K.Y.Sze, On immunizing five-beta hybrid-stress element models from 'trapezoidal locking' in practical analyses, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **47**, 907-920 (2000).

4. XM.Chen, S.Cen, YQ.Long, ZH.Yao, Membrane elements insensitive to distortion using the quadrilateral area coordinate method, *Computers and Structures* **82**, 35-54 (2004).
5. D.J.Allman, A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis, *Computers and Structures*, **19**, 1-8, (1984).
6. R.D.Cook, On the Allman triangle and a related quadrilateral element, *Computers and Structures*, **22**, 1065-7, (1986).
7. T.H.H.Pian, Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions, *AIAA Journal*, **2**, 1333-1336 (1964).
8. T.H.H.Pian, K.Sumihara, Rational approach for assumed stress finite elements, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **20**, 1685-1695 (1984).
9. C.A.Felippa, *Advanced Finite Element Method*, <http://www.devdept.com> (2004).
10. T.J.R.Hughes, *The Finite Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1987.
11. R.L.Taylor, P.J. Beresford and E.L.Wilson, A non-conforming element for stress analysis, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **10**, 1211-1219 (1976).
12. R.Piltner, R.L.Taylor, A systematic construction of B-bar functions for linear and non-linear mixed-enhanced finite elements for plane elasticity problems, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **44**, 615-639 (1999).