

## ASPECTE PRIVIND CALCULUL COEFICIENTILOR DE CORECȚIE LA FORFECARE PENTRU MODELUL REISSNER-MINDLIN LA PLĂCILE COMPOZITE UTILIZATE ÎN CONSTRUCȚII

Șef lucr.dr.ing Botis Marius Florin\* Prof.dr.ing Curtu Ioan\*\*  
Prof.dr.ing Repanovici Angela\*\*\*

**Rezumat:** În articol este prezentată o procedură de calcul a coeficienților de corecție pentru plăcile cu ortotropie de material sau materiale stratificate cu lamine. Determinarea coeficienților de corecție se face din considerente energetice. Pentru a evidenția modul de implementare a proceduri de calcul a coeficienților de corecție în calculul plăcilor cu MEF sunt prezentate rezultatele obținute de autori cu un program realizat în Matlab.

**Abstract:** In this paper authors treat some aspects about shear coefficients used for MEF analysis of composites plates. For understanding the procedure that determine shear coefficients, in paper are presented an example made in Matlab.

### Introducere

Plăcile compozite se utilizează frecvent în domeniul industrial la ora actuală datorită faptului că raportul dintre rezistența și greutate este foarte mare în comparație cu plăcile confecționate din materialele uzuale. Analiza deformațiilor și tensiunilor din plăcile compozite se poate realiza prin utilizarea metodei elementelor finite. Modelele de placă care se utilizează în analiza cu metoda elementelor finite se clasifică în funcție de grosimea plăci analizate. Pentru plăcile subțiri se utilizează modelul de placă Kirchhoff, iar pentru plăcile groase se folosește modelul de placă Reissner-Mindlin. În cazul modelului de placă Kirchhoff, eforturile secționale de forfecare nu sunt luate în considerație datorită faptului că grosimea plăci este mică, iar ipoteza normalelor drepte la suprafața mediană se verifică. Dacă grosimea plăci este mare ipoteza lui Kirchhoff nu mai este valabilă și trebuie luate în considerare eforturile secționale de forfecare.

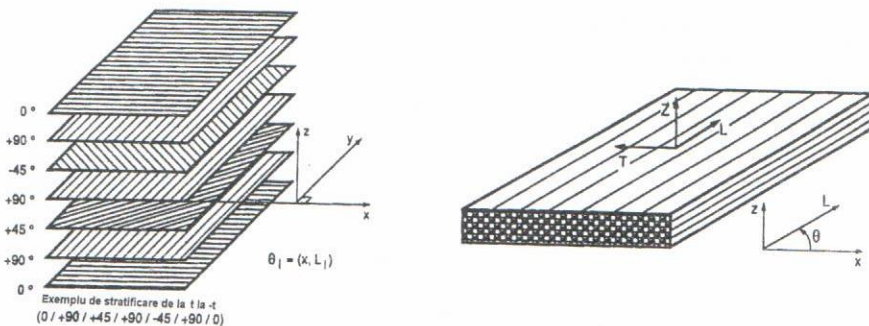


Fig.1 Compozite laminate (stratificate)

### Calculul coeficienților de corecție

Relația dintre eforturile secționale și deformații în cazul materialelor izotrope este:

$$\{M\} = [H_f]\{\chi\}; \{T\} = [H_c]\{\gamma\}. \quad (1)$$

unde,  $[H_f]$  este matricea rigidităților de încovoiere și torsiune;

$[H_c]$ -matricea rigidităților de forfecare.

În cazul materialelor izotrope coeficientul de corecție pentru eforturile secționale de forfecare este  $\frac{5}{6}$ , iar matricea  $[H_c]$  devine:

$$[H_c] = \frac{5}{6} h \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

unde  $h$  este grosimea plăci.

Dacă se consideră un material stratificat (fig.1) atunci rigiditățile echivalente la încovoiere și torsiune se determină cu relațiile:

$$[H_f] = \sum_{i=1}^{nr. ply} \frac{1}{3} (z_{i+1}^3 - z_i^3) [H]_i; h_i = z_{i+1} - z_i \quad (3)$$

unde,  $h_i$  grosimea fiecărui strat;

$[H]_i$ , matricea rigidităților la încovoiere și torsiune pentru fiecare strat.

Pentru un singur strat în care orientarea laminelor este  $\theta$ , matricea rigidităților la încovoiere torsiune și matricea rigidităților de forfecare în raport cu sistemul de referință natural este:

$$[H_L] = \begin{bmatrix} H_{LL} & H_{LT} & 0 \\ H_{LT} & H_{TT} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix}; [H_{dL}] = \begin{bmatrix} G_{LZ} & 0 \\ 0 & G_{TZ} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

unde,

$$H_{LL} = \frac{E_L}{u}; H_{TT} = \frac{E_T}{u}; H_{LT} = E_T \frac{\nu_{LT}}{u} = E_L \frac{\nu_{TL}}{u}; u = 1 - \nu_{LT}\nu_{TL}; G_{LZ} = G_{LT}, G_{TZ} = \frac{E_T}{2(1+\nu_{TZ})}.$$

Transformarea rigidităților, a tensiunilor și deformațiilor din sistemul de referință natural în sistemul de referință global se face cu relațiile:

-transformarea rigidităților de încovoiere-torsiune:

$$[H] = [T_1]^T [H_L] [T_1]; [H_\tau] = [T_2]^T [H_{dL}] [T_2]; \quad (5)$$

-transformarea tensiunilor și deformațiilor:

$$\begin{cases} \{\varepsilon_L\} = [T_1]\{\varepsilon\}; \{\sigma\} = [T_1]^T \{\sigma_L\}; \{\gamma_L\} = [T_2]\{\gamma\}; \{\tau\} = [T_2]^T \{\tau_L\}; \\ \{\gamma_L\}^T = \{\gamma_{LZ} \ \gamma_{TZ}\}^T; \{\varepsilon_L\}^T = \{\varepsilon_L \ \varepsilon_T \ \gamma_{LT}\}^T; \end{cases}$$

unde,

$$[T_1] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}; [T_2] = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}; \quad (6)$$

Pentru determinarea coeficienților de corecție la forfecare, se egalează energia de deformație la forfecare  $U_1$  când se consideră o distribuție tridimensională a tensiunilor

$\tau_{xz}, \tau_{yz}$ , cu energia de deformare la forfecare  $U_2$  corespunzătoare modelului de placă Reisner-Mindlin.

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_{-h}^h \{\tau\}^T [H_\tau]^{-1} \{\tau\} dz; U_2 = \frac{1}{2} \{T\}^T [H_c]^{-1} \{T\} = \frac{1}{2} \{\gamma\}^T [H_c] \{\gamma\}. \quad (7)$$

$$\text{unde } \{\tau\}^T = \{\tau_{xz} \quad \tau_{yz}\}^T; \{T\} = \int_{-h}^h \{\tau\} dz = [H_c] \{\gamma\}.$$

Energia de deformare la forfecare în cazul repartiției tridimensionale a tensiunilor tangențiale este:

$$U_2 = \frac{1}{2} \left( \int_{-h}^h \{\tau\}^T dz \right) [H_c]^{-1} \left( \int_{-h}^h \{\tau\} dz \right). \quad (8)$$

Pentru a determina distribuția tensiunilor tangențiale se utilizează relațiile de echilibru Cauchy:

$$\tau_{xz} = - \int_{-h}^z \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dz; \tau_{yz} = - \int_{-h}^z \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) dz; \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \text{ pentru } z = \pm h. \quad (9)$$

Relația dintre tensiuni și eforturile secționale este:

$$\{\sigma(z)\} = [H(z)] \cdot z \cdot [H_f]^{-1} \{M\} = z \cdot [A(z)] \{M\}$$

Înlocuind în relațiile (9) rezultă următoarea relație între tensiunile tangențiale și eforturile secționale:

$$\{\tau(z)\} = [D_1(z)] \{T\} + [D_2(z)] \{S\}; \quad (10)$$

unde s-au făcut notațiile,

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \end{Bmatrix}; \{S\}^T = \begin{Bmatrix} \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} & \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} & \frac{\partial M_y}{\partial x} & \frac{\partial M_x}{\partial y} \end{Bmatrix}^T; \quad (11)$$

$$[D_1] = \int_{-h}^z -\frac{z}{2} \begin{bmatrix} A_{11} + A_{33} & A_{13} + A_{32} \\ A_{31} + A_{23} & A_{22} + A_{33} \end{bmatrix} dz; [D_2] = \int_{-h}^z -\frac{z}{2} \begin{bmatrix} A_{11} - A_{33} & A_{13} - A_{32} & 2A_{12} & 2A_{31} \\ A_{31} - A_{23} & A_{33} - A_{22} & 2A_{32} & 2A_{21} \end{bmatrix} dz.$$

Expresia energiei de deformare la forfecare  $U_1$  ținând cont de relațiile (11), devine:

$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} \{\{T\}; \{S\}\}^T \begin{bmatrix} [C_{11}] & [C_{12}] \\ [C_{12}]^T & [C_{22}] \end{bmatrix} \{\{T\}; \{S\}\}; \\ [C_{11}] = \int_{-h}^h [D_1]^T [H_\tau]^{-1} [D_1] dz; [C_{22}] = \int_{-h}^h [D_2]^T [H_\tau]^{-1} [D_2] dz; \end{cases} \quad (12)$$

Prin egalarea energiilor de deformare la forfecare  $U_1 = U_2$  se poate determina matricea  $[H_c]$ .

$$\{\{T\}; \{S\}\}^T \begin{bmatrix} [C_{11}] - [H_c]^{-1} & [C_{12}] \\ [C_{12}]^T & [C_{22}] \end{bmatrix} \{\{T\}; \{S\}\} = 0 \Rightarrow [H_c] = [C_{11}]^{-1}; \quad (13)$$

**Exemplu.** Se consideră o placă pătrată cu latura de 1000mm incastrata pe margine si care este acționată la mijloc de o forță de 1000N. Placa are grosimea de 10mm și este



confectionata din boron-epoxy care are următoarele caracteristici de material  
 $E_L = 227502 \text{ MPa}$ ,  $E_T = 144813.49$ ,  $G_{LT} = 48260.9$ ,  $\nu_{LT} = 0.23$ .

Matricele rigidităților echivalente sunt:

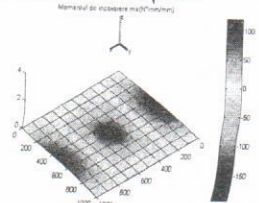
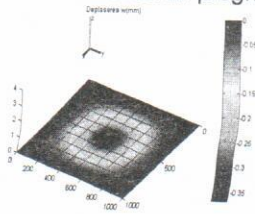
$$[H_{zL}] = \begin{bmatrix} G_{LZ} & 0 \\ 0 & G_{TZ} \end{bmatrix}; [H_L] = \begin{bmatrix} H_{LL} & H_{LT} & 0 \\ H_{TL} & H_{TT} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix}; [H_f] = \frac{h^3}{12} [H_L]; \{\sigma(z)\} = z[A]\{M\};$$

$$[A] = \frac{12}{h^3} [I]; \{\tau(z)\} = [D_1(z)]\{T\};$$

(14)

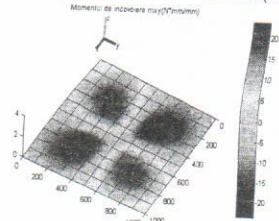
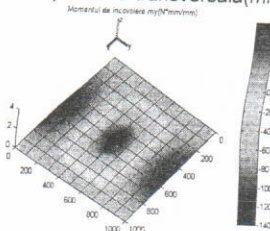
$$[D_1(z)] = \frac{6}{h^3} \left( \left( \frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right) [I]; [C_{11}] = [H_{zL}]^{-1} \int_{-h}^h \left( \frac{6}{h^3} \left( \left( \frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right) \right)^2 dz = \frac{6}{5h} [H_{zL}]^{-1}.$$

În urma analizei cu un program realizat de autori în Matlab s-a obținut:



Deplasarea transversală(mm)

Efortul secțional de încovoiere mx(Nmm/mm)



Efortul secțional de încovoiere my(Nmm/mm)

Efortul secțional de torsiune mx(Nmm/mm)

### Rezultate si concluzii:

-Procedura de determinare a coeficienților de corecție la forfecare a plăcilor cu modelul Reissner-Mindlin permite o implementare ușoară în programele de elemente finite.

-Efectul eforturilor secționale de forfecare nu mai poate fi neglijat în cazul plăcilor cu grosime mare. Metoda descrisă poate fi extinsă la calculul plăcilor tip sandwich.

### BIBLIOGRAFIE

[1] Reissner, E., A consistent treatment of transverse shear deformations in laminated anisotropic plates, AIAA J., Vol.10, No5, p.716-718 1972.

\*Universitatea Transilvania Brașov, E-mail: [mbois@unitbv.ro](mailto:mbois@unitbv.ro)

\*\*Universitatea Transilvania Brașov, E-mail: [curtui@unitbv.ro](mailto:curtui@unitbv.ro)

\*\*\*Universitatea Transilvania Brașov, E-mail: [repa@unitbv.ro](mailto:repa@unitbv.ro)