



A IV –a Sesiune Științifică

CIB 2008

21 - 22 Noiembrie 2008, Brașov

## ANALIZĂ NELINIARĂ CU ELEMENTE FINITE PENTRU SIMULAREA ȘERPUIRII CĂII SUB ACȚIUNEA ÎNCĂRCĂRILOR DIN VARIAȚII DE TEMPERATURĂ ȘI CONVOI

Valentin-Vasile UNGUREANU<sup>1</sup>

UNIVERSITATEA TRANSILVANIA, BRAȘOV, vvungureanu@unitbv.ro

**Abstract:** In this paper a discrete model is developed for the buckling analysis of continuous welded rail (CWR) subjected to temperature load. The model was called SCFJ (Stabilitatea Căii Fără Joante = Stability of CWR) and was developed at Civil Engineering Faculty from Brasov. It is based on a nonlinear analysis in total lagrangean formulation. The structure consists of beam elements and lateral, longitudinal and torsional spring elements. The source of nonlinearity is due to the geometric nonlinearity of the rail high axial forces and also to the nonlinearity of material type for the lateral and longitudinal resistance of the ballast and the torsional resistance of the fasteners. The use of a displacement control algorithm leads the analysis beyond the critical point and permits a more realistic computation of the structural safety. The track model is encoded into a special purpose program which allows a parametric study of the influence of vehicle loading, the stiffness properties of the structure and of the geometric imperfections on the track stability. The validity of the present model is verified through a series of comparative analyses with other author's results.

**Key words:** Continuous welded rail buckling, non-linear stability analysis.

### 1. INTRODUCERE

În această lucrare se prezintă un model discret bazat pe o analiză neliniară cu elemente finite, pentru simularea pierderii stabilității căii fără joante sub acțiunea încărcărilor din variații de temperatură și convoi, model denumit SCFJ (Stabilitatea Căii Fără Joante) [1]. Cadrul șine-traverse este modelat cu ajutorul elementelor de tip grindă și de tip resort, cu rigiditate pe direcțiile longitudinală, transversală și la rotire, care țin cont atât de neliniaritatea geometrică a șinei (generată de prezența defectelor de direcție și nivel) supuse la eforturi axiale mari, cât și de comportamentul neliniar al materialului din prisma căii și al prinderii șinei de traversă. Se utilizează un algoritm de control al deplasării, care conduce analiza până în domeniul postcritic, permițând o evaluare mai realistă a influenței imperfecțiunilor de tip defect de direcție asupra siguranței structurii. Modelul a fost validat prin intermediul unei serii de analize comparative cu rezultatele altor modele dezvoltate în cadrul UIC (Uniunea Internațională a Căilor Ferate) și FRA (Administrația Feroviară din SUA) [2], [17].

### 2. MODELAREA PARAMETRILOR CĂII ȘI AI ÎNCĂRCĂRII

Modelul SCFJ introduce *parametrii fizici și geometrici ai căii* după cum urmează:

**Rezistența longitudinală la deplasarea traverselor în prisma căii:** în conformitate cu modelele din literatura de specialitate, rezistența longitudinală este modelată prin curba efort-deplasare (liniară sau biliniară), ca în figura 1. În modelul SCFJ rezistența longitudinală este introdusă prin intermediul unor elemente de tip resort cu caracteristicile din figura 1. În prezența convoiului, comportamentul biliniar se corectează [2] în funcție de forța de apăsare pe traversă Q cu ajutorul relațiilor (1):

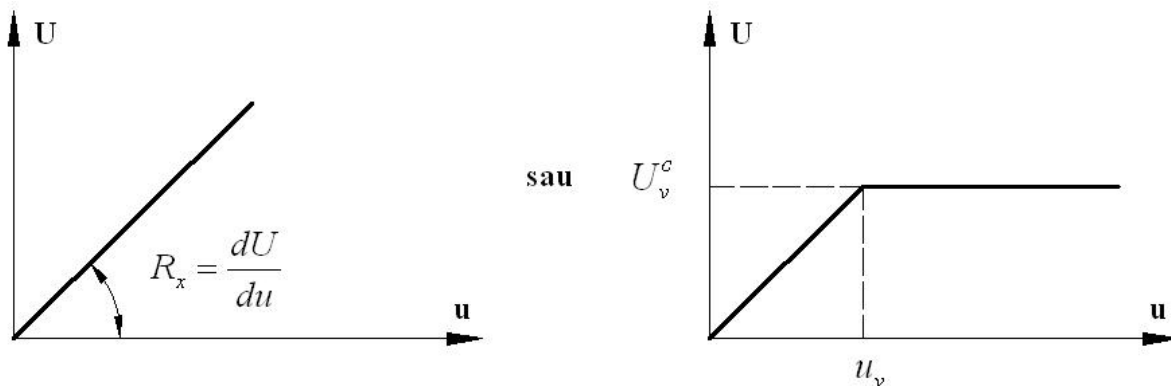
$$\left. \begin{aligned} U_v^c &= U_v + Q \cdot \tan \phi_L \\ U_v^c &\geq \frac{2}{3} U_v \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

în care  $U_v$  este valoarea de referință a rezistenței longitudinale (fără încărcarea din convoi),  $U_v^c$  este valoarea corectată a acestei rezistențe, iar  $\phi_L$  este unghiul de frecare între talpa traversă și materialul din prisma căii situat sub talpa traversei.

**Rezistența transversală (laterală) la deplasarea traverselor în prisma căii:** în modelul SCFJ rezistența transversală este introdusă prin intermediul unor elemente de tip resort cu caracteristicile triliare, sau cu atenuare exponențială ( $tipV=1$ ) [2] din figura 2. Pentru situația căii încărcate cu convoi, comportamentul, de asemenea, se corectează [2] în funcție de forța de apăsare pe traversă Q cu ajutorul relațiilor (2) și (3) sau (4):

$$\left. \begin{aligned} V_v^c &= V_v + Q \cdot \tan \phi_T \\ V_v^c &\geq \frac{2}{3} V_v \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$V_r^c = V_r \cdot V_v^c / V_v \quad (3)$$



**Fig. 1 Rezistența la deplasarea longitudinală a traverselor în prisma căii în modelul SCFJ [3], [4]**

Pentru cazul  $tipV=1$ :

$$V = V_r^c + (V_v^c - V_r^c) \cdot 2^{-\frac{v-v_v}{v_r-v_v}} \quad (\text{dacă } v > v_v) \quad (4)$$

în care  $V_v$  este valoarea de referință a rezistenței transversale de vârf (fără încărcarea din convoi),  $V_v^c$  este valoarea corectată a acestei rezistențe,  $\phi_T$  este unghiul de frecare între talpa traversă și materialul din prisma căii situat sub talpa traversei, iar  $V_r$  este valoarea de referință a rezistenței transversale reziduale (fără încărcarea din convoi) și  $V_r^c$  este valoarea corectată a acestei rezistențe.

Pentru cazul cu atenuare exponențială diferența  $V_v^c - V_r^c$  se înjumătățește la mijlocul distanței  $v_v^c - v_r^c$ .

Relațiile de inegalitate din cadrul expresiilor (1) și (2) au în vedere faptul că, chiar și în situația ridicării traversei de pe patul căii se mai menține 2/3 din rezistența la deplasarea laterală, respectiv longitudinală a traversei în prisma căii [2].

**Rezistența la rotire a șinei în prinderi:** această rezistență este introdusă prin intermediul unor elemente de tip resort cu caracteristici liniare sau triliniare, din figura 3. Pentru situația căii încărcate cu convoi, comportamentul, de asemenea, poate fi corectat în mod corespunzător în funcție de forța de apăsare pe traversă.

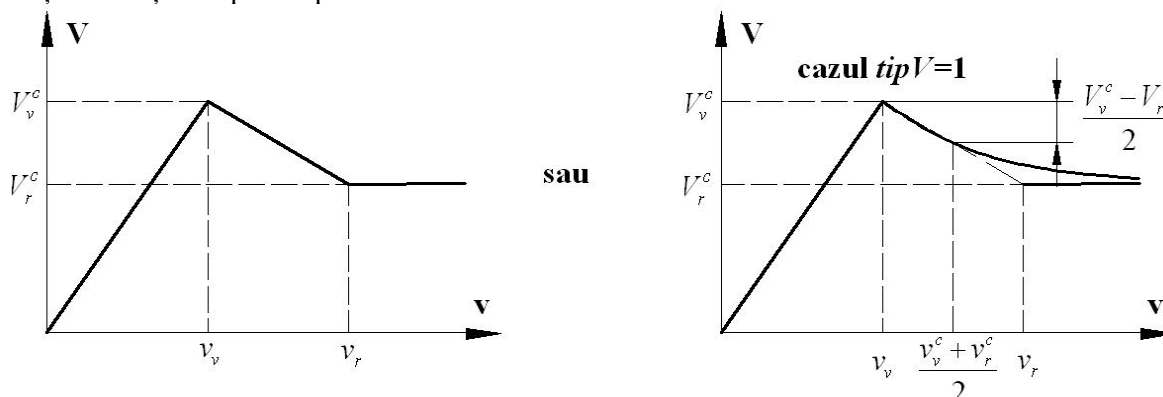


Fig. 2 Rezistența la deplasarea transversală a traverselor în prisma căii [3] , [4]

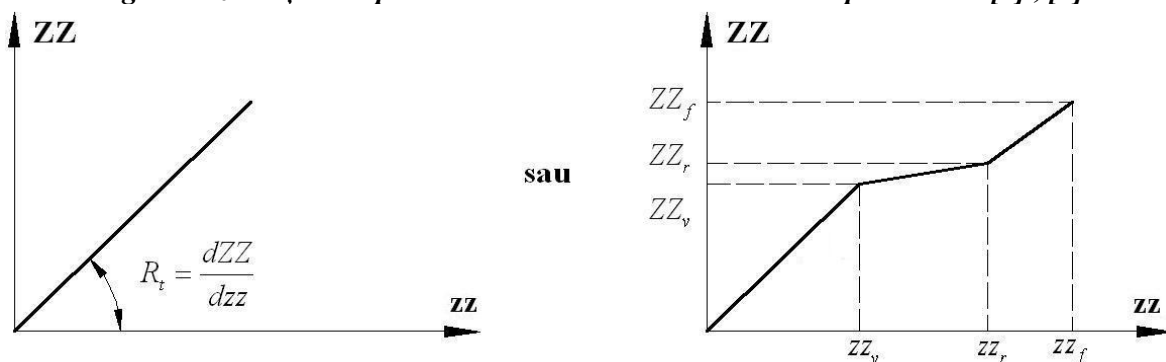


Fig. 3 Rezistența la rotirea șinei în prindere [3] , [4] , [5] , [6] , [7] , [8]

**Rigiditatea în plan vertical** (rigiditatea reazemului de sub talpa șinei) este, de asemenea, modelată prin elemente resort cu comportare liniară.

**Caracteristicile geometrice și fizice ale șinei** modelată prin elemente de tip bară sunt: aria secțiunii transversale  $A$ , momentele de inerție față de axele verticală  $I_z$  și orizontală  $I_y$ , modulul de elasticitate  $E$  și coeficientul de dilatare termică  $\alpha$ . S-au considerat două **tipuri de defecte de direcție**, semiundă sau undă completă de cosinus, cu lungime  $\lambda$  și amplitudine  $\delta$  (figura 6). **Încărcarea** s-a introdus cu ajutorul a două perechi de forțe concentrate verticale corespunzând unui vehicul cu boghiuri. Modelul permite parametrizarea distanței dintre pivoții boghiurilor și dintre axele osiilor și a încărcărilor pe osii. **Lungimea modelului** de calcul este o dată de intrare în program. La capetele modelului se introduc elemente de margine având caracteristicile (rigiditate longitudinală și coeficient de dilatare termică) corespunzătoare [2] . Acest lucru permite reducerea lungimii modelului și, deci, a efortului de calcul. În plus, s-a introdus și posibilitatea lucrului pe semistructură simetrică, ceea ce permite o reducere suplimentară a timpului de calcul. Se păstrează, însă o lungime suficient de mare a cadrului șine – traverse, pentru a prinde în calcul și influența pe care o are șerpuirea căii asupra zonelor adiacente porțiunii de cale pe care au loc deplasările transversale, pe aceste zone modificându-se starea de eforturi ca urmare a deplasărilor longitudinale ale cadrului șine – traverse spre zona unde au loc deplasări laterale.

### 3. ALGORITMUL DE CALCUL

Calculul se face în două etape:

#### Determinarea încărcărilor care revin traverselor

Modelul de calcul este o grindă pe reazeme elastice având comportare liniară. Modulul de program corespunzător acestei etape este scfj1.m.

Nodurile modelului se consideră în dreptul traverselor. Modelul are  $nnd$  noduri în dreptul traverselor și  $nel = nnd - 1$  bare (elemente). Bara  $i$  este bara curentă și are nodurile  $i$  și  $i + 1$  (fig. 4).

Lungimea unei bare este  $L = Lm/n$  (unde  $Lm$  este lungimea modelului, iar  $n$  este numărul de diviziuni). Întrucât raza curbei este mare, modelul se consideră o grindă dreaptă. Unui nod „ $i$ ” i se atribuie 2 grade de libertate: deplasarea verticală  $w$  și rotirea  $\theta_y$ . Numărul total de deplasări ale modelului este deci:

$$nec = 2 \cdot nnd \quad (5)$$

Sistemul de ecuații de echilibru este de forma:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (6)$$

în care:

- $\mathbf{K}_{(nec \times nec)}$  este matricea de rigiditate a structurii și rezultă în urma asamblării matricelor de rigiditate  $\mathbf{k}$  ale barelor și ale rigidităților la deplasările verticale ale traverselor.
- $\mathbf{a}_{(nec \times 1)}$  este vectorul deplasărilor nodurilor structurii.
- $\mathbf{F}_{(nec \times 1)}$  este vectorul încărcărilor în nodurile structurii, care (în cazul considerat aici) rezultă în urma asamblării vectorilor  $f_0$  ai încărcărilor concentrate de pe bare.

Fiecare bară are 4 grade de libertate.

Matricea de rigiditate  $\mathbf{k}_{(4 \times 4)}$  a unei bare se obține sub forma:

$$\mathbf{k} = \mathbf{B}^T \mathbf{k}^d \mathbf{B} \quad (7),$$

unde  $\mathbf{B}_{(2 \times 4)}$  este o matrice de transformare care leagă vectorul deplasărilor elementului de vectorul redus al deplasărilor, care produce numai deformații și nu conține deplasările de solid rigid ale elementului de bară:

$$\mathbf{a}_{el} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{y_i} \\ w_{i+1} \\ \theta_{y_{i+1}} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{el}^d = \begin{Bmatrix} \theta_{y_i}^d \\ \theta_{y_{i+1}}^d \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{el}^d = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_{el}, \quad (8)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1/L & 1 & -1/L & 0 \\ 1/L & 0 & -1/L & 1 \end{bmatrix}$$

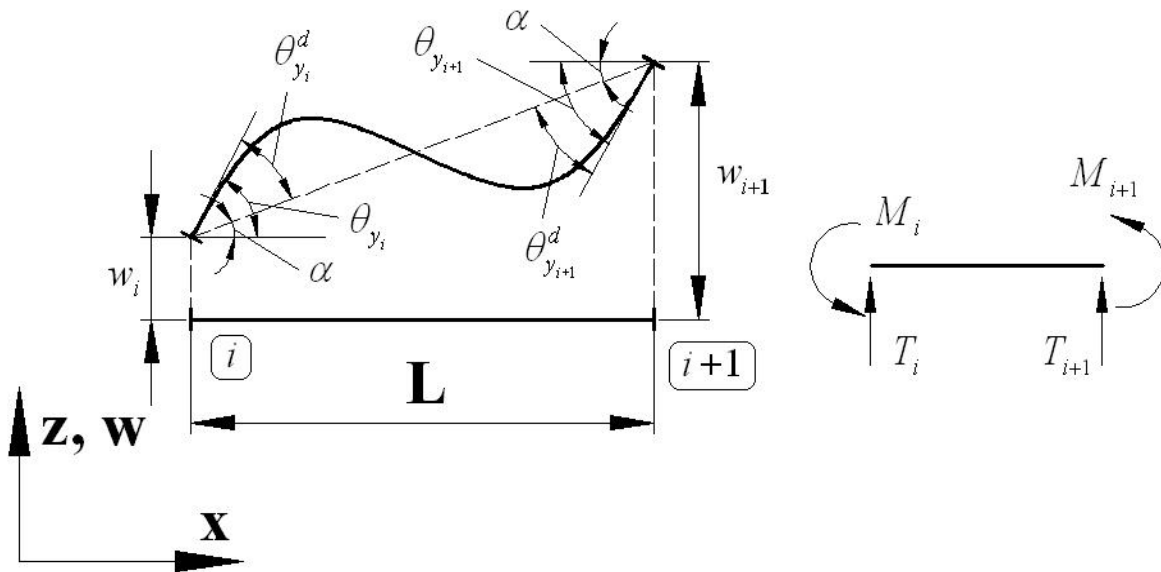


Fig. 4 Deplasările barei în plan vertical [3], [4]

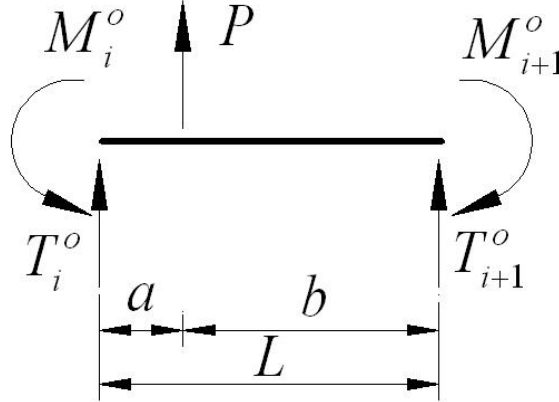
Întrucât deplasările sunt mici, unghiul  $\alpha$  de rotire de solid rigid a axei barei se poate aproxima prin  $(w_{i+1} - w_i)/L$ , iar matricea  $\mathbf{B}$  introduce tocmai această relație cinematică. Matricea  $\mathbf{B}^T$  stabilește legătura dintre setul redus de forțe nodale  $\mathbf{f}^d = (M_i \ M_{i+1})^T$  și setul complet  $\mathbf{f} = (T_i \ M_i \ T_{i+1} \ M_{i+1})^T$  (fig. 5). Relația  $\mathbf{f} = \mathbf{B}^T \mathbf{f}^d$  exprimă echilibrul barei.

Matricea  $\mathbf{k}^d$  ( $2 \times 2$ ) de rigiditate a barei este raportată numai la setul redus de deplasări și forțe nodale:

$$\mathbf{k}^d = \frac{EI_y}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (9)$$

În cazul în care bara este încărcată, se calculează și vectorul  $\mathbf{f}_0$  al încărcărilor de pe bară. Acest vector conține reacțiunile de încastrare perfectă ale barei cu semnul schimbat (ele devin acțiuni pe structură).

$$\begin{aligned} M_i^0 &= P \cdot b^2 a / L^2 & T_i^0 &= (P \cdot b + M_i + M_{i+1}) / L \\ M_{i+1}^0 &= -P \cdot a^2 b / L^2 & T_{i+1}^0 &= (P \cdot a - M_i - M_{i+1}) / L \\ \mathbf{f}_0 &= (T_i^0 \ M_i^0 \ T_{i+1}^0 \ M_{i+1}^0)^T \end{aligned} \quad (10)$$



**Fig. 5 Forțe nodale echivalente din încărcarea concentrată pe bară [3] , [4]**

Faza de asamblare a matricelor de rigiditate și a vectorilor încărcărilor pe elemente poate fi scrisă sub forma:

$$\mathbf{K}_{ind,ind} = \mathbf{K}_{ind,ind} + \mathbf{k} \text{ și } \mathbf{F}_{ind} = \mathbf{F}_{ind} + \mathbf{f}_0. \quad (11),$$

unde *ind* este setul de indici ai deplasărilor barei curente. De exemplu pentru bara 3 având nodurile 3 și 4, rezultă  $ind = (5 \ 6 \ 7 \ 8)$ . Relația (11) se aplică pentru fiecare bară.

Asamblarea rigidităților traverselor se poate scrie sub forma:

$$\mathbf{K}_{jnd,jnd} = \mathbf{K}_{jnd,jnd} + R_z L. \quad (12),$$

unde *jnd* este setul de indici corespunzător deplasărilor verticale ale nodurilor  $jnd = (1 \ 3 \ 5 \ \dots \ 2nnd - 1)$ .

Condițiile de rezemare ale structurii se introduc prin suprimarea deplasărilor nule din reazeme. Acest lucru se realizează în felul următor:

Se inițializează vectorul deplasărilor structurii cu zerouri, iar deplasările din nodurile libere se determină prin relația:

$$\mathbf{a}_{id} = (\mathbf{K}_{id,id})^{-1} \mathbf{F}_{id} \quad (13),$$

unde *id* reprezintă setul de indici corespunzători deplasărilor libere ale structurii. Practic matricea din relația (13) nu se inversează, ci se aplică un algoritm de rezolvare a sistemului liniar de ecuații, care ține cont de simetria și structura de matrice rară a matricei de rigiditate structurală  $\mathbf{K}$ .

Cu deplasările verticale *w* ale nodurilor se trece la calculul forțelor de apăsare pe fiecare traversă:

$$\mathbf{Q} = -w R_z L + G_{traversa}. \quad (14)$$

În continuare se trece la corectarea rezistențelor transversale, longitudinale și la rotire ținând cont de forțele de apăsare Q pe traversă (relațiile (1), (2), (3) și (4)).

Trebuie precizat faptul că tot calculul se realizează în ipoteza că nu se ia în considerare efectul vitezei la stabilirea încărcării care revine unei traverse. Se poate face, însă, calculul considerând și acest efect prin multiplicarea sarcinilor pe osie transmise de convoi asupra căii cu coeficientul de amplificarea dinamică, corespunzător stării căii, materialului rulant și vitezei de circulație.

### Calculul la șeruire în sens transversal

Modelul de calcul în plan transversal este o grindă dreaptă sau curbă pe reazeme elastice, cu imperfecțiuni de formă ale axei, așa cum se arată în figura 6. Nodurile modelului se consideră tot în dreptul traverselor. La fiecare nod se aplică legături longitudinale, transversale și de rotație. La capetele modelului se introduc elemente de margine având caracteristicile (rigiditate longitudinală și coeficient de dilatare termică) corespunzătoare [2]. Încărcarea modelului este o variație de temperatură în șine. Calculul ține cont de neliniaritatea comportării legăturilor sistemului în dreptul traverselor și de neliniaritatea geometrică introdusă de forțele axiale importante din șine provenite din variația de temperatură. Caracteristicile barelor și legăturilor corespund celor două fire de șine din alcătuirea cadrului șine-traverse. Modelul are tot  $nnd$  noduri și  $nel = nnd - 1$  bare (elemente) ca și în cazul modelului de calcul la forțe verticale. Astfel bara  $i$  este bara curentă și are nodurile  $i$  și  $i+1$ .

Un nod are trei grade de libertate: translațiile  $u$  și  $v$  în planul orizontal și rotația  $\theta_z$ . Deci sistemul are în total  $3nnd$  deplasări. În analiza structurii se urmărește obținerea curbei creștere de temperatură - deplasare. Problema fiind neliniară, pentru rezolvare se aplică o formulare lagrangeană actualizată cu un procedeu incremental bazat pe controlul deplasării. Procedeu incremental determină starea sistemului ca o succesiune de creșteri ale parametrilor de stare (forțe și deplasări). Pentru descrierea algoritmului de calcul distingem următoarele configurații (stări):

- configurația inițială sau de referință  $j=0$  de la care încep calculele;
- configurația curentă  $j$ ;
- configurația nouă  $j+1$ .

În cadrul unui increment  $j$  caracterizat printr-o deplasare de control  $\delta v_{cj}$  suficient de mică, se poate aproxima comportarea neliniară a sistemului printr-o relație liniară între creșterile succesive ale parametrilor de stare:

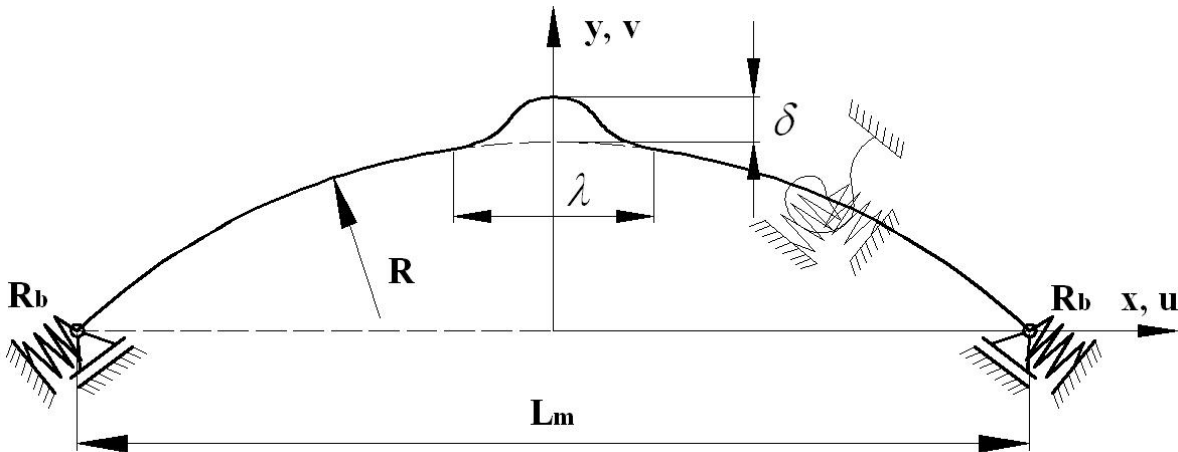
$$\mathbf{a}_{j+1} = \mathbf{a}_j + \delta \mathbf{a}_j, \quad \delta \mathbf{F}_j = \mathbf{K}_j \delta \mathbf{a}_j, \quad (15)$$

în care:  $\mathbf{a}_j$  reprezintă vectorul deplasărilor în configurația curentă,

$\delta \mathbf{a}_j$  este vectorul incrementelor deplasărilor,

$\delta \mathbf{F}_j$  este vectorul încărcărilor pe structură, care duc sistemul din starea curentă în starea nouă și care rezultă din încărcarea sistemului cu incrementul  $\delta v_{cj}$  al deplasării de control,

$\mathbf{K}_j$  este matricea de rigiditate incrementală (tangentă).



**Fig. 6 Modelul de calcul în plan orizontal [3], [4], [5], [6], [7], [9], [10], [11]**

Pe baza relației (14) se poate introduce schema de calcul următoare:

$$\delta \mathbf{a}_j = (\mathbf{K}_j)^{-1} \delta \mathbf{F}_j, \quad \mathbf{a}_{j+1} = \mathbf{a}_j + \delta \mathbf{a}_j. \quad (16)$$

Pentru îmbunătățirea performanțelor algoritmului incremental s-a adoptat o variantă cunoscută sub numele de regula punctului de mijloc (midpoint rule) sau regula lui Heun [12]:

$$\mathbf{a}_{j+1/2} = \mathbf{a}_j + 1/2 (\mathbf{K}_j)^{-1} \delta \mathbf{F}_j,$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{j+1/2} &= \mathbf{K}(\mathbf{a}_{j+1/2}), \\
\delta \mathbf{F}_{j+1/2} &= \delta \mathbf{F}(\mathbf{a}_{j+1/2}), \\
\mathbf{a}_{j+1} &= \mathbf{a}_j + (\mathbf{K}_{j+1/2})^{-1} \delta \mathbf{F}_{j+1/2}.
\end{aligned}
\tag{17}$$

Acest procedeu permite detectarea depășirii capacității de rezistență laterală la deplasarea traverselor în prisma căii în primul pas de “încercare” și actualizarea matricei de rigiditate  $\mathbf{K}_{j+1/2}$  în mod corespunzător. Dezavantajul introdus de dublarea numărului de asamblări și factorizări ale matricei de rigiditate este compensat de acuratețea îmbunătățită.

Formularea lagrangeană actualizată în cadrul fiecărui pas incremental folosește relațiile de echilibru incremental exprimate pe schema deformată actualizată și conduce la anumite simplificări ale expresiilor acestor relații.

În cadrul algoritmului de calcul se aplică **controlul deplasării**, iar vectorul  $\delta \mathbf{F}_j$  nu se explicitează ca atare. Incrementul de deplasare  $\delta \mathbf{a}_j$  este rezultatul aplicării unei variații de temperatură necunoscute, care produce o creștere cunoscută a deplasării de control. În continuare pentru simplificarea relațiilor se renunță la indicele  $j$  al configurației curente. Controlul deplasării înseamnă, deci, aplicarea unor incremente ale deplasării  $\delta v_c$  unui nod pe o anumită direcție, ca încărcare pe sistem. Controlul deplasării permite tratarea comportării pierderii de stabilitate cu traversare (snap-through). În cazul unui algoritm la care se aplică drept parametru de control încărcarea, în punctul de pierdere a stabilității matricea de rigiditate tangentă devine singulară și deci sistemul de ecuații care descrie echilibrul sistemului în pasul incremental nu poate fi rezolvat direct. Deplasarea de control se comportă ca un reazem suplimentar cu deplasări impuse și elimină singularitatea.

**Drept deplasare de control se ia deplasarea transversală maximă a nodului din axa de simetrie a modelului**, dar se poate adopta și o altă deplasare. În metoda de control al deplasării aplicată la problema de pierdere a stabilității căii descrisă aici, incrementul  $\delta T$  al variației de temperatură este necunoscut.

În cadrul unui increment calculele decurg în felul următor:

- Se adoptă un sistem de bază cu deplasarea de control blocată;
- Sistemul de bază se încarcă succesiv cu:

a) O creștere unitară de temperatură  $\delta T = 1$ , care produce deplasările  $\delta \mathbf{a}^{(1)}$  ale nodurilor rămase libere și reacțiunea  $R^{(1)}$  în reazemul artificial introdus în dreptul deplasării de control (fig. 7).

b) O deplasare a reazemului artificial (întotdeauna în sensul creșterii deplasării laterale aferente acestui reazem artificial) egală cu pasul curent impus  $\delta v_c$  al deplasării de control, care produce deplasările  $\delta \mathbf{a}^{(2)}$  ale nodurilor și reacțiunea  $R^{(2)}$  în reazemul artificial (fig. 7).

Pentru ca sistemul de bază să se comporte identic cu sistemul real, pentru situația de echilibru obținută, este necesar ca reacțiunea din reazemul (blocajul) artificial al sistemului de bază să fie zero (fig. 7). Acest lucru se poate realiza prin adoptarea unei variații de temperatură corespunzătoare  $\delta T = x$  în locul variației unitare considerate inițial.

Aplicând principiul suprapunerii efectelor se obține condiția:  $R = R^{(1)}x + R^{(2)} = 0$ , care permite determinarea variației necunoscute de temperatură. Astfel, incrementul variației de temperatură este:

$$\delta T = x = -R^{(2)} / R^{(1)}, \tag{18}$$

iar deplasarea incrementală devine:

$$\delta \mathbf{a} = \delta \mathbf{a}^{(1)}x + \delta \mathbf{a}^{(2)}. \tag{19}$$

Variația totală de temperatură  $t_j$  din configurația curentă  $j$  se obține din însumarea incrementelor de temperatură  $\delta T$  date de relația (18). Valorile temperaturilor  $t_j$  se rețin și după terminarea calculelor se folosesc la trasarea curbei variație de temperatură – deplasare laterală (fig. 9). Din analiza curbei rezultă tipul pierderii de stabilitate (prin saltul/traversarea de echilibru sau prin deformare continuă), în cazurile curente obținându-se creșterile critice de temperatură  $T_{max}$  și  $T_{min}$  (fig. 9).

Dacă incrementul variației de temperatură este  $x$  rezultat din condiția (18), pe sistemul real (fără reazemul artificial) se produce deplasarea de control  $\delta v_c = 0 \cdot x + \delta v_c$ .

Matricea de rigiditate tangentă  $\mathbf{K}_j$  din incrementul  $j$  depinde de starea sistemului în acest pas și se obține în urma asamblării matricelor de rigiditate tangentă  $\mathbf{k}_{i(6 \times 6)}$  ale barelor și ale rigidităților legăturilor, care reprezintă traversele.

$$\mathbf{k}_i = EA/L \cdot \mathbf{r}^T \mathbf{r} + \mathbf{B}^T (\mathbf{k}^d + \mathbf{k}_G^d) \mathbf{B} + N_j / L \cdot \mathbf{z}^T \mathbf{z} \quad (20)$$

în care:

$$\mathbf{r} = (-\cos\beta \ -\sin\beta \ 0 \ \cos\beta \ \sin\beta \ 0),$$

$$\mathbf{z} = (\sin\beta \ -\cos\beta \ 0 \ -\sin\beta \ \cos\beta \ 0),$$

( $\beta$  este unghiul barei față de axa  $x$  în configurația curentă – fig. 8)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}^d = \frac{EI_z}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_G^d = \frac{N_j L}{30} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix},$$

iar  $N_j$  este efortul axial în bară în pasul  $j$ , care se determină cu ajutorul deformației axiale  $\Delta L_j$  (fig. 8) și variației totale de temperatură  $t_j$  din configurația curentă  $j$ :

$$N_j = EA (\Delta L_j / L_j - \alpha t_j),$$

$$\Delta L_j = L_j - L_0,$$

$$L_0 = \sqrt{(\mathbf{x}_{i+1}^0 - \mathbf{x}_i^0)^2}, \quad (21)$$

$$L_j = \sqrt{(\mathbf{x}_{i+1}^j - \mathbf{x}_i^j)^2}.$$

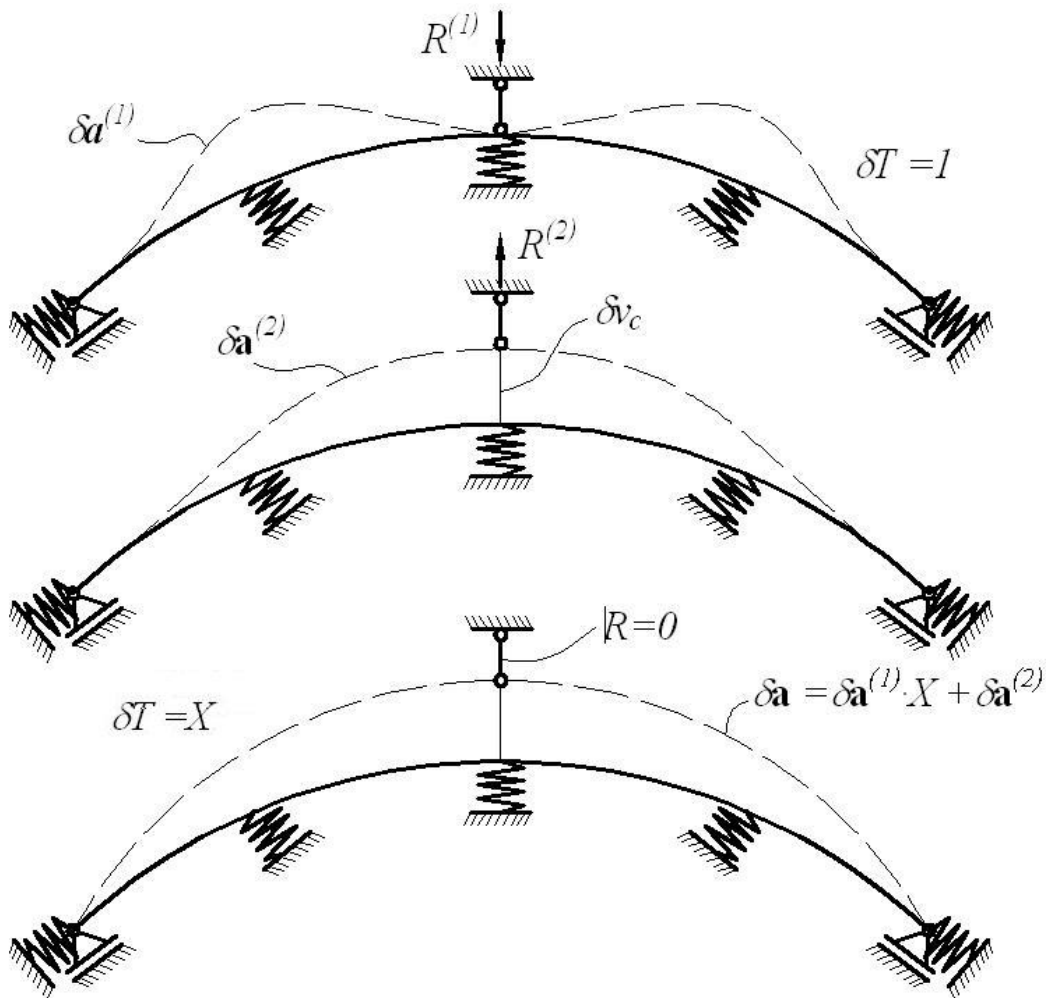
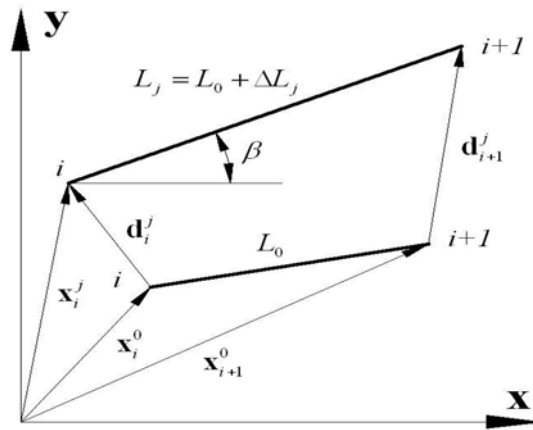


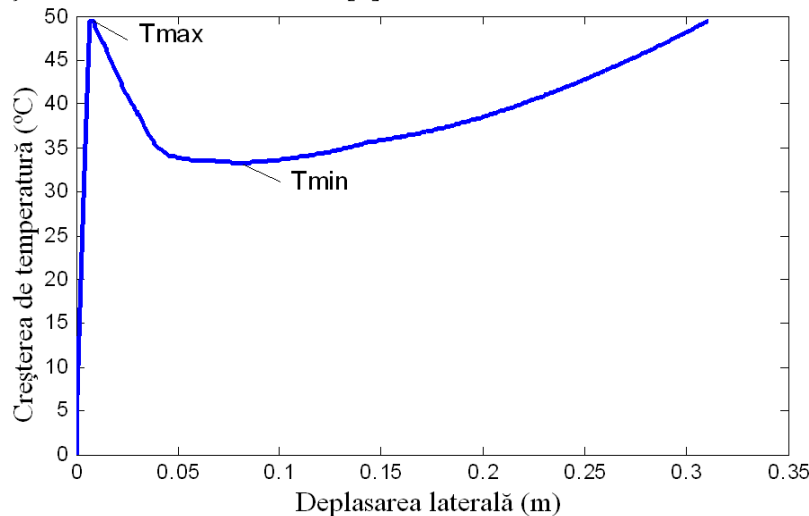
Fig. 7 Determinarea incrementului de temperatură și deplasare prin controlul deplasării [3], [4]





**Fig. 8 Deformarea axială a barei [3] , [4]**

Matricele  $\mathbf{k}^d$  și  $\mathbf{k}_G^d$  sunt matricele de rigiditate de material și respectiv geometrică la încovoiere raportate la setul redus de deplasări, care produc deformații (în mod asemănător cu matricea (8) de la calculul la forțe verticale). Matricea  $\mathbf{k}_G^d$  depinde numai de caracteristicile geometrice ale barei și de efortul axial. După cum se poate observa, relația (20) introduce o neliniaritate prin intermediul efortului axial  $N_j$ . Matricea de rigiditate tangentă completă a barei în formularea lagrangeană actualizată mai conține doi termeni, care introduc efectul modificării lungimii barei din încovoierea incrementală, și efectul forței tăietoare [12], [13], [14], [15], [16]. Având în vedere că în cazurile practice modelul de calcul este suficient de rafinat, neglijarea termenilor menționați nu conduce la erori semnificative. În cazul exemplului din studiul de sensibilitate calculat cu matricea de rigiditate completă s-au obținut, așa cum se poate observa în figura 9, creșterile de temperatură  $T_{max}=49,6681$  °C și  $T_{min}=35,7500$  °C, iar cu varianta bazată pe relația (20) a rezultat  $T_{max}=49,6678$  °C și  $T_{min}=35,7060$  °C, deci există o foarte bună concordanță între rezultatele modelului SCFJ și rezultatele modelului din [2].



**Fig. 9 Deplasarea laterală în funcție de variația de temperatură [4] , [9] , [10] , [11]**

## BIBLIOGRAFIE

- [1] Ungureanu, V.V., *Cercetări privind simularea pierderii stabilității căii fără joante*, Teză de doctorat, Conducător științific: prof. univ. dr. ing. Atanasie Talpoși, Universitatea “Transilvania” din Brașov, Facultatea de construcții, Catedra construcții, Brașov, 2007
- [2] Van, M.A., *Stability of Continuous Welded Rail Track*, Delft University Press, 1997, ISBN:90-407-1485-1

- [3] Dósa, A., Ungureanu V.V., *SCFJ – model discret de pierdere a stabilității căii fără joante*, “Zilele Academice Timișene: ediția a X-a, 24-25 mai 2007 - Simpozion: Infrastructuri eficiente pentru transporturile terestre”, Editura Solness, Timișoara, 2007
- [4] Dósa, A., Ungureanu V.V., *Discrete model for the stability of continuous welded rail*, ”Computational Civil Engineering 2007”, International Symposium, Iași, România, May 25, 2007
- [5] Ungureanu, V.V., Dósa, A., *Simularea pierderii stabilității căii fără joante folosind modelul SCFJ*, a XXXI-a Conferință Națională de Mecanica Solidelor, 27-29 Septembrie 2007, Chișinău, Editura U.T.M.
- [6] Ungureanu, V.V., Dósa, A., *Parametrical study of the effect of torsional resistance of the fastenings on the stability of continuous welded rail*, ”Computational Civil Engineering 2007”, International Symposium, Iași, România, May 25, 2007
- [7] Dósa, A., Ungureanu V.V., *Studiu parametric al efectului rezistenței la rotire a sinei în prinderi asupra stabilității căii fara joante*, Zilele Academice Timișene: ediția a X-a, 24-25 mai 2007 - Simpozion: Infrastructuri eficiente pentru transporturile terestre”, Editura Solness, Timișoara, 2007
- [8] Ungureanu, V.V., *Modele de pierdere a stabilității căii fără joante*, Referatul nr.3 din cadrul stagiului de pregătire pentru doctorat, Universitatea TRANSILVANIA din Brașov, Facultatea de Construcții, Brașov, 2006
- [9] Ungureanu, V.V., Comanici, M., *Sensitivity study of a model for the stability analysis of the continuous welded rail*, ”Computational Civil Engineering 2007”, International Symposium, Iași, România, May 25, 2007
- [10] Comanici, M., *Studiu de senzitivitate a modelului SCFJ pentru stabilitatea căii fără joante*, “Zilele Academice Timișene: ediția a X-a, 24-25 mai 2007 - Simpozion: Infrastructuri eficiente pentru transporturile terestre”, Editura Solness, Timișoara, 2007
- [11] Ungureanu, V.V., *Studiu parametric pentru validarea programului SCFJ*, a XXXI-a Conferință Națională de Mecanica Solidelor, 27-29 Septembrie 2007, Chișinău, Editura U.T.M.
- [12] Felippa C.A., *Nonlinear Finite Element Methods*, <http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/NFEM.d/Home.html>
- [13] Bănuț, V., *Calculul neliniar al structurilor*, Editura tehnică, București, 1981
- [14] Crisfield, M.A., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, John Wiley & Sons, 1991
- [15] Dósa, A., Litră E., *Elemente de bară încovoiată cu precizie îmbunătățită pentru calculul neliniar și de stabilitate*, *Revista Construcțiilor*, 2006, ISSN 1841-12901
- [16] Dósa, A., Popa L., *High order beam elements for the stability and non-linear analysis of frame structures*, “Computational Civil Engineering 2006”, International Symposium, Iași, România, May 26, 2006
- [17] \*\*\* - *ERRI D202-RP12 Improved knowledge of forces in CWR track (including switches) – Final report*, European Rail Research Institute, Utrecht, February 1999.