

ALGORITHM TO DEFINE THE SPEED RATIOS OF THE TRACTOR COMPLEX GEARTRAINS

ALGORITM DE DEFINIRE A RAPOARTELOR DE TRANSMITERE ALE TRANSMISIILOR COMPLEXE PENTRU TRACTOARE

Prof. Ph.D. Eng. Preda I., Prof. Ph.D. Eng. Ciolan Gh.

Transylvania University Brasov / Romania

E-mail: pion@unitbv.ro

Abstract: Complex mechanical transmissions, allowing many gear ratios by in-series mounting of more gear units, present often difficulties to obtain the desired ratios. In the paper it was described an evaluation criterion of how the actual speed ratios approximate the sequence of the desired values. It also was presented an algorithm that, for a given kinematic scheme, allows either to obtain the sequence of the practically achievable ratios or to choose the best ratios sequence from more sets of suggested values.

Keywords: complex gear train, gear ratio, method of least squares, mathematical criterion

INTRODUCTION

Motor vehicles moving or working in difficult conditions (such as tractors, truck-tractors, dump trucks or military vehicles) must be able to easily adjust their speed and thrust. Therefore, their transmissions are able to achieve a high number of gear ratios.

To increase efficiency and to reduce chemical pollution, there is a present trend to also increase the number of gear ratios to other vehicle types, such as trucks (up to 32 gears) or cars and buses (up to 10 gears). For reasons of cost, size and weight, such complex transmissions are obtained by the combination of more structural units (more simple gear mechanisms), which can have series, parallel or combined arrangements. This paper refers to the transmission of the in-series structural units.

The achievement of the motor-vehicles geartrain-ratios requires several stages. The first of these consists in the setting of the *wanted (ideal) gear ratios* w_i , as they result from the calculus of vehicle's dynamic performances [2], [3], [4]. The next step is choosing the kinematic schemes of the subassemblies capable to provide the necessary number of gear ratios.

The chosen solution may introduce some restrictions that make the *gear ratios theoretically achievable* i_j by this structure to differ from the ideal ones. Also, the *real (actual) gear ratios* (which can be obtained in practice) may differ from the achievable ones because the numbers of teeth can only take discrete values, which are in a limited range [2], [4].

Combining in series some structural units ensures to the geartrain a more compact, light and cheap construction because, with few gear-wheels, a large number of gear ratios can be obtained [2], [5].

The manufacturers' preference for such a solution may be observed from the Figure 1 which shows statistical results of 91 agricultural tractor types existent on the global market in 1992. It can be seen that the most frequent gear numbers are 24 (4x4x2), 16 (2x4x2) and 12 (2x3x2).

Rezumat: Transmisiiile mecanice complexe, ce realizează un număr mare de trepte prin înserierea mai multor reductoare cu angrenaje, prezintă adesea dificultăți în obținerea rapoartelor de transmitere dorite. În lucrare s-a descris un criteriu de apreciere a felului în care rapoartele de transmitere reale aproximează șirul valorilor dorite. De asemenea s-a prezentat un algoritm care, în cazul unei scheme cinematice date, permite fie obținerea șirului rapoartelor realizabile practic, fie alegerea celui mai potrivit șir de rapoarte dintre mai multe seturi de valori propuse.

Cuvinte cheie: transmisie complexă cu angrenaje, raport de transmitere, metoda celor mai mici pătrate, criteriu matematic

INTRODUCERE

Autovehiculele care se deplasează sau lucrează în condiții grele (precum tractoarele, autoremorcherile, autobasculantele sau vehiculele militare) trebuie să fie capabile să-și regleze cu ușurință viteza de deplasare și forța de tracțiune. De aceea, transmisiiile lor sunt capabile să realizeze un număr mare de trepte de viteză.

Pentru creșterea eficienței și pentru reducerea poluării chimice, în prezent se constată o tendință de creștere a numărului de trepte și la alte tipuri de autovehicule, precum autocamioane (până la 32 trepte) sau autoturisme și autobuze (până la 10 trepte). Din considerente de cost, gabarit și greutate, astfel de transmisii complexe se obțin prin combinarea mai multor unități structurale (mecanisme mai simple cu, roți dințate), care pot fi dispuse în serie, în paralel sau combinat. Lucrarea de față se referă la transmisiiile cu unități structurale înseriate.

Obținerea rapoartelor de transmitere ale angrenajelor transmisiiilor autovehiculelor presupune parcurgerea mai multor etape. Prima dintre acestea constă în stabilirea *rapoartelor de transmitere dorite (ideale)* w_i , așa cum rezultă ele din calculul performanțelor dinamice ale autovehiculului [2], [3], [4]. Următoarea etapă o reprezintă alegerea schemelor cinematice ale subansamblurilor capabile să asigure numărul de trepte necesar.

Soluția aleasă poate introduce anumite restricții care fac ca *rapoartele de transmitere teoretic realizabile* i_j cu acea structură să difere față de cele ideale. De asemenea, *rapoartele de transmitere reale* (ce pot fi obținute în mod practic) pot diferi de cele realizabile deoarece numerele de dinți pot lua doar valori discrete, aflate într-un domeniu limitat [2], [4].

Înserierea mai multor unități structurale conferă transmisiei o construcție cu gabarit redus, mai ușoară și mai ieftină deoarece, cu angrenaje puține, poate fi realizat un număr mare de trepte de viteză [2], [5].

Preferința constructorilor pentru o astfel de soluție se poate remarca din Figura 1 care prezintă rezultate statistice pentru 91 tipuri de tractoare agricole existente pe piață în anul 1992. Se poate vedea că cele mai frecvente numere de trepte întâlnite sunt 24 (3x4x2), 16 (2x4x2) și 12 (2x3x2).

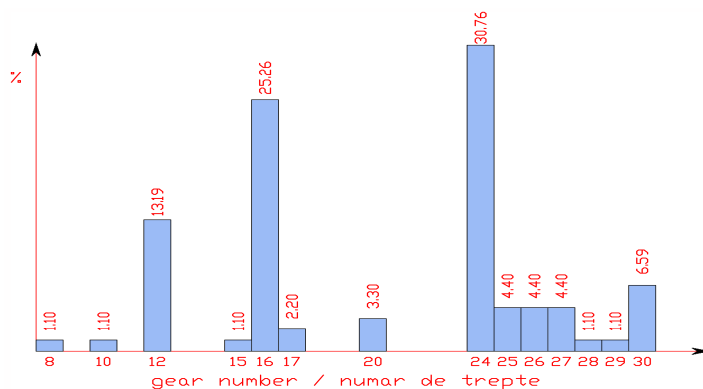


Fig. 1 – Probability to find different gear-numbers at the agricultural tractor types (statistics of 91 types) / Probabilitatea de a întâlni diferite numere de trepte de viteze la tipurile de tractoare agricole (statistică realizată pe 91 tipuri)

At the gearboxes consisting of a single structural unit, the gear ratios are independent values. But it doesn't happen the same in the case of complex transmissions, obtained by the combination in-series of several structural units, because only a certain part of the ratios could be imposed.

If one considers that a particular structural-unit x ($x = a, b, \dots$) can perform a number of ratios k_x ($k_x = k_a, k_b, \dots$), then the total number k of the geartrain ratios is equal with the product of the gear-numbers of in-series structural-units:

$$k = \prod_x k_x = k_a k_b \dots \quad (1)$$

Of these, independent values can take only k_{ind} ratios:

$$k_{ind} = 1 + \sum_x (k_x - 1) \quad (2)$$

The remaining gear ratios will be combinations of the first ones, obtained by multiplying the partial ratios and will usually have an unreasonable distribution, the gap between two consecutive ratios being either too small or too big.

In the case of complex gear trains (containing more units), one of the most used method to realize the ratios sequence consists in arranging the ratios in a geometric series [2], [3], [4], [5]. That kind of ratios arrangement will enable the engine's functioning in the same speed range, with benefic implications on the vehicle's operating performance, mainly at steady or quasi-steady driving speeds. In addition, it allows an easy way to find the necessary gear ratios of the component structural units.

Mathematically, the ratios arrangement in geometric series means either the ratios of any two successive gear ratios will have the same value, or, on a logarithmic scale, the gaps between successive gear ratios will be equal.

The sequence of the wanted gear ratios may comply with the geometric progression only in extremely particular cases. Moreover, in transitory driving regime, the use time of some gears may become too short, sometimes making the driver to renounce using some gears with close ratios to the one engaged. The ratios' geometric-progression arrangement leads in such cases to the inefficient use of the geartrain and to the increase of the physical and concentration driver's effort.

At the design of many motor vehicle types, the engineers' intention is to arrange more gears in the driving speed range which have the biggest apparition probability in the vehicle's life span.

This manufacturers' concern results from the statistics of agricultural-tractors' rated working-speed arrangement

La cutiile de viteze alcătuite dintr-o singură unitate structurală, rapoartele de transmitere sunt valori independente. Nu același lucru se întâmplă în cazul transmisiilor complexe obținute prin inserierea mai multor unități structurale, deoarece doar o anumită parte a rapoartelor ar putea fi impuse.

Dacă se consideră că o anumită unitate structurală x ($x = a, b, \dots$) poate realiza un număr de rapoarte k_x ($k_x = k_a, k_b, \dots$), atunci numărul total k al rapoartelor transmisiei este egal cu produsul numerelor de trepte ale unităților structurale înseriate:

Dintre acestea pot lua valori independente doar k_{ind} rapoarte:

Restul rapoartelor de transmitere vor fi combinații ale primelor, ce se obțin prin înmulțirea rapoartelor parțiale și vor avea de obicei o repartiție nerațională, saltul dintre două rapoarte succesive fiind fie prea mic, fie prea mare.

În cazul transmisiilor complexe (ce conțin mai multe unități), una dintre cele mai folosite metode de etajare constă în dispunerea rapoartelor de transmitere în serie geometrică [2], [3], [4], [5]. Acest mod de aranjare a rapoartelor va permite utilizarea motorului în același domeniu de turație, cu implicații benefice asupra performanțelor de exploatare ale autovehiculului, mai ales la viteze de deplasare constante sau aproape constante. În plus, se permite stabilirea facilă a rapoartelor de transmitere ale unităților structurale componente.

Matematic, etajarea în progresie geometrică înseamnă fie că rapoartele oricăror două rapoarte de transmitere succesive vor avea aceeași valoare, fie că, pe o scară logaritmică, intervalele dintre rapoarte de transmitere succesive vor fi egale.

Șirul rapoartelor de transmitere dorite nu respectă progresia geometrică decât în cazuri cu totul particulare. De asemenea, în regim tranzitoriu de deplasare, timpul de utilizare a unor trepte poate deveni prea scurt, determinând uneori conducătorul auto să renunțe la utilizarea unor trepte cu rapoarte de transmitere apropiate de cea cuplată. Etajarea în progresie geometrică conduce în astfel de cazuri la o utilizare ineficientă și la creșterea efortului fizic și de concentrare al conducătorului auto.

La proiectarea multor tipuri de autovehicule, intenția inginerilor este de a dispune mai multe trepte de viteze în domeniul vitezelor de deplasare care au cea mai mare probabilitate de utilizare pe durata de viață a autovehiculului.

Această preocupare a constructorilor rezultă și din statistica dispunerii vitezelor de lucru nominale la

shown in Figure 2, where the upper plot is in normal coordinates, and the lower plot in semi-logarithmic coordinates.

tractoarele agricole, prezentată în Figura 2, unde graficul de sus este în coordonate normale, iar graficul de jos în coordonate semilogaritmice.

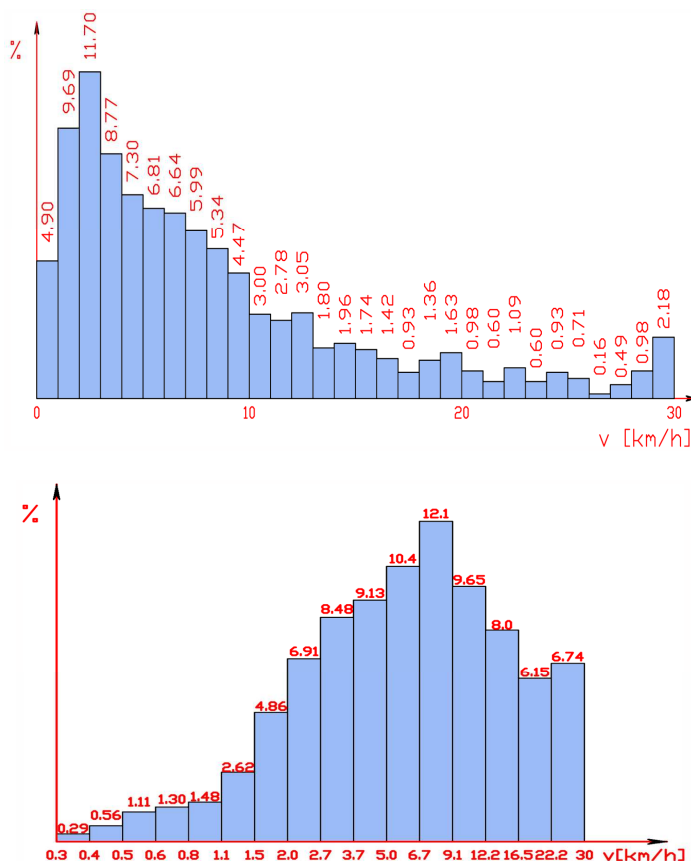


Fig. 2 – Probability of encountering a certain rated working speed at the agricultural tractors (statistics of 91 types) / Probabilitatea de a întâlni o anumită viteză de lucru nominală la tractoarele agricole (statistică realizată pe 91 tipuri)

MATERIALS AND METHODS

The comparison of different speed-ratios arrangements must take into account their influence over the overall vehicle performances (dynamics, environment protection, fuel consumption, reliability of the propulsion system) and over the driver's stress. But both the performances and driver's stress depend on the speed range at which the engine will run, and this range is proportional with the ratio of a pair of neighboring (successive) geartrain ratios.

Based on this observation and on the need to maintain as accurate as possible the speed range set by the design engineer, in the present paper it is suggested the *method of least squares* to minimize the relative errors e_j of the geartrain ratios positioning on a logarithmic axis:

MATERIALE ȘI METODE

Compararea unor moduri de etajare diferite trebuie să țină cont de influența acestora asupra performanțelor globale ale autovehiculului (dinamică, protecția mediului, consum de combustibil, fiabilitate a sistemului de propulsie) și asupra solicitării conducătorului. Dar atât performanțele cât și solicitarea conducătorului depind de domeniul de turație la care va funcționa motorul, iar acest domeniu este proporțional cu raportul unei perechi de rapoarte de transmitere învecinate (succesive).

Pornind de la această constatare și de la necesitatea păstrării cât mai precise a domeniului de turație stabilit de inginerul proiectant, în lucrarea de față se propune *metoda celor mai mici pătrate* pentru minimizarea erorilor relative e_j de poziționare a rapoartelor de transmitere pe o axă logaritmică:

$$-e_j = \ln i_j - \ln w_j = \ln \frac{i_j}{w_j} \quad (3)$$

Thus, the function g to be minimized is the weighted sum of squared logarithms differences of the achievable i_j and wanted w_j geartrain ratios:

Astfel, funcția g ce urmează a fi minimizată este suma ponderată a pătratelor diferențelor logaritmilor rapoartelor de transmitere realizabile i_j și dorite w_j :

$$g = \sum_{j=1}^k p_j e_j^2 = \sum_{j=1}^k p_j (\ln i_j - \ln w_j)^2 = \sum_{j=1}^k p_j \left(\ln \frac{i_j}{w_j} \right)^2 \quad (4)$$

The weighting of the errors e_j with the values p_j may be required because the gears are differently used. The weighs p_j may be even the usage probabilities of the gears j ($j=1 \dots k$).

To obtain comparable values of the function g , the weighs will respect the normalization condition:

Ponderarea erorilor e_j cu valorile p_j poate fi necesară deoarece treptele de viteze sunt utilizate în mod diferit. Ponderile p_j ar putea fi astfel chiar probabilitățile de utilizare ale treptelor j ($j=1 \dots k$).

Pentru a obține valori comparabile ale funcției g , ponderile vor respecta condiția de normare:

$$\sum_{j=1}^k p_j = 1 \tag{5}$$

As can be seen from the equation (4), the function g , to be minimized, has as parameters only the weights p_i and the relative errors e_i . It does not directly depend on the magnitude of the geartrain ratios, in contrast to the function E_p proposed in the thesis [1], which is strongly influenced by these.

După cum se poate observa din relația (4), funcția g , care trebuie minimizată, are ca parametri numai ponderile p_i și erorile relative e_i . Ea nu depinde în mod direct de mărirea rapoartelor de transmitere, spre deosebire de funcția E_p propusă în lucrarea [1], care este puternic influențată de acestea.

$$E_p = \left(\sum_{j=1}^k (i_j - w_j)^p \right)^{1/p}, \quad p > 1 \tag{6}$$

The same thing would happen also with other possible criterion functions, which do not use logarithms. In the case of keeping the same total gears-number k , the value of the function g or the weighted mean error $(g/k)^{1/2}$ may be used as an *objective optimization criterion* for the ratios arrangement (ratios sequence), the minimum values indicating the best distribution of the achievable geartrain ratios.

Același lucru s-ar întâmpla și cu alte posibile funcții criteriu, la care nu se recurge la logaritmare. În cazul menținerii aceluiași număr total de trepte k , valoarea funcției g sau eroarea ponderată medie $(g/k)^{1/2}$ pot fi folosite drept *criteriu obiectiv de optimizare* a modului de etajare, valorile minime indicând cea mai bună distribuție a rapoartelor de transmitere realizabile.

Starting from a sequence of desired gear ratios and from a known structure of the complex geartrain, the *algorithm* to be described below allows obtaining the geartrain's achievable ratios that best approximate the given-ratios in the sense of the least squares.

Pomind de la un set de rapoarte de transmitere dorite și de la o structură cunoscută de transmisie complexă cu angrenaje, *algoritmul* ce va fi prezentat în continuare permite obținerea rapoartelor de transmitere realizabile în practică care aproximează cel mai bine rapoartele date în sensul celor mai mici pătrate.

It is recalled that the algorithm was obtained on the hypothesis that the geartrain structure is already set (one knows the layout of the structural-units arranged in series) and also one knows how to achieve each gear ratio. This restriction is primarily due to the method of least squares, which requires prior knowledge of the function shape and seeks only to determine the constants involved in this function.

Se reamintește că algoritmul a fost obținut în ipoteza că structura transmisiei este deja adoptată (se cunoaște organizarea unităților structurale dispuse în serie) și se cunoaște de asemenea modul în care se realizează fiecare raport de transmitere. Această restricție se datorează în primul rând metodei celor mai mici pătrate, care presupune cunoașterea anterioară a formei funcției și urmărește doar determinarea constantelor care intervin în această funcție.

It is considered a geartrain (for example a gearbox) with k ratios, which is composed of simple structural units connected in series and denoted with a, b, c, \dots . Each unit may achieve ka, kb, kc, \dots gear ratios.

Se consideră o transmisie (de ex. o cutie de viteze) cu k trepte, care are în componență unitățile structurale simple înseriate ce sunt notate cu a, b, c, \dots . Fiecare unitate ar putea realiza ka, kb, kc, \dots trepte.

In descending order of values, the (known or unknown) gear ratios of the structural units are:

În ordine descrescătoare a valorilor, rapoartele de transmitere (cunoscute sau necunoscute) ale unităților structurale sunt:

$$\begin{aligned} ia &: ia_1, ia_2, \dots, ia_{ka} \\ ib &: ib_1, ib_2, \dots, ib_{kb} \end{aligned} \tag{7}$$

One considers that in order to obtain a certain gear j of the geartrain, the structural units a, b, c, \dots are engaged in the gears ja, jb, jc, \dots , all these dependencies being known, as has been mentioned before. The overall ratio of the gear j can be written as:

Se consideră că pentru obținerea unei trepte oarecare j a transmisiei, unitățile structurale a, b, c, \dots sunt cuplate în treptele ja, jb, jc, \dots , toate aceste dependențe fiind cunoscute, așa cum s-a precizat anterior. Raportul de transmitere total al treptei j se poate scrie:

$$i_j = ia_{ja} ib_{jb} ic_{jc} \dots \tag{8}$$

The logarithms of the gear ratios will be noted with $a_{ja}, b_{jb}, c_{jc}, \dots$ for the structural units, with x_j for the wanted ones and with y_j for the achievable ones:

Logaritmi rapoartelor de transmitere se vor nota cu $a_{ja}, b_{jb}, c_{jc}, \dots$ pentru unitățile structurale, cu x_j pentru cele dorite și cu y_j pentru cele realizabile:

$$\begin{aligned} a_{ja} &= \ln(ia_{ja}), \quad ja = 1, 2, \dots, ka \\ b_{jb} &= \ln(ib_{jb}), \quad jb = 1, 2, \dots, kb \end{aligned} \tag{9}$$

$$x_j = \ln(w_j), \quad j = 1, 2, \dots, k \tag{10}$$

$$y_j = \ln(i_j) = \ln(ia_{ja} ib_{jb} ic_{jc} \dots) = \ln(ia_{ja}) + \ln(ib_{jb}) + \ln(ic_{jc}) + \dots = a_{ja} + b_{jb} + c_{jc} + \dots, \quad j = 1, 2, \dots, k \tag{11}$$

It is assumed further that among the terms $a_1, a_2, \dots, a_{ka}; b_1, b_2, \dots, b_{kb}; \dots$ given by the relationships (9) are located s unknown values $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ that must be ascertained. Considering these unknowns as independent variables, the logarithms of the structural achievable gear-ratios, given by equations (11), become:

Se presupune în continuare că printre termenii $a_1, a_2, \dots, a_{ka}; b_1, b_2, \dots, b_{kb}; \dots$ dați de relațiile (9) se află s valori necunoscute $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ce vor trebui determinate. Considerând aceste necunoscute ca variabile independente, logaritmi rapoartelor de transmitere structural realizabile, dați de relațiile (11), devin:

$$y_j = f_j(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r_j + t_{j,1} \alpha_1 + t_{j,2} \alpha_2 + \dots + t_{j,s} \alpha_s = r_j + \sum_{m=1}^s t_{j,m} \alpha_m \quad (12)$$

As it was mentioned before, all the functions f_j have a known form or, in other words, there are known all the constants r_j , and also the matrix of the terms $t_{j,m}$ ($j=1,2,\dots,k$, $m=1,2,\dots,s$) with which are multiplied the independent variables α_m .

Comparing the equations (11) and (12) it results that r_j is the sum of all the terms with known values existing in the row of the logarithms of the equations (9), while the terms $t_{j,m} = \partial f_j / \partial \alpha_m$ take either the value 1 or the value 0, as the unknown α_m is or is not between the terms a_{ja} , b_{jb} , c_{jc} , ... of the equation (11).

With these specifications, the function g to be minimized, given by equation (4), becomes:

$$g = \sum_{j=1}^k p_j (y_j - x_j)^2 = \sum_{j=1}^k p_j (f_j(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) - x_j)^2 \quad (13)$$

In order that the function g to have a minimum it is necessary that all the partial derivatives with respect to the independent variables $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ to be null. This yields to a linear system of equations with s unknowns:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial \alpha_n} = \sum_{j=1}^k p_j (f_j(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) - x_j)^2 \frac{\partial f_j(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)}{\partial \alpha_n} = 0, \quad n=1, 2, \dots, s \quad (14)$$

Inserting equation (12) in the previous relation it is obtained the system:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k p_j \left(r_j + \left(\sum_{m=1}^s t_{j,m} \alpha_m \right) - x_j \right) t_{j,n} &= 0, \quad n=1, 2, \dots, s \\ \sum_{j=1}^k p_j t_{j,n} \left(\sum_{m=1}^s t_{j,m} \alpha_m \right) - (x_j - r_j) &= 0, \quad n=1, 2, \dots, s \\ \sum_{j=1}^k p_j t_{j,n} \left(\sum_{m=1}^s t_{j,m} \alpha_m \right) &= \sum_{j=1}^k p_j t_{j,n} (x_j - r_j), \quad n=1, 2, \dots, s \end{aligned} \quad (15)$$

For this system to be determined it is necessary that the unknowns' number s do not exceed the number k_{ind} of the independent geartrain ratios that can be achieved by the in-series layout of the structural units, i.e. $s \leq k_{ind}$.

The system (15) can be written also in matrix form:

$$[A] \cdot [\alpha] = [B], \quad (16)$$

where the unknowns coefficients $[A]$ and the free terms $[B]$ can be determined with the equations:

$$A_{n,m} = \sum_{j=1}^k p_j t_{j,n} t_{j,m}, \quad n=1, 2, \dots, s, \quad m=1, 2, \dots, s \quad (17)$$

$$B_n = \sum_{j=1}^k p_j t_{j,n} (x_j - r_j), \quad n=1, 2, \dots, s \quad (18)$$

Solving the system (16), $[\alpha] = [A]^{-1} \cdot [B]$, leads to the ascertaining of the values that allow the best approximation of the desired transmission ratios in the sense of the least squares, resulting first the logarithms of the structurally-achievable gear-ratios, and then, by means of relations (9), their true values.

In order to work effectively with the presented equations it should be known the weights p_j . The authors recommend that these weights to be even the use probabilities of the gears.

For this it can be used diagrams like those in Figure 2, capable to valorize the statistics of some constructions with similar destinations, which gave maximum satisfaction in service.

RESULTS

In order to facilitate an easier understanding of the algorithm, a calculus example will be presented further.

Let's assume an agricultural tractor, for which a 12 speed gearbox is intended. It is aimed that at the engine's rated speed (for example 2200 rpm) this

Aşa cum s-a mai amintit, toate funcțiile f_j au formă cunoscută sau, altfel spus, se cunosc toate constantele r_j , precum și matricea termenilor $t_{j,m}$ ($j=1,2,\dots,k$, $m=1,2,\dots,s$) cu care se înmulțesc variabilele independente α_m .

Comparându-se relațiile (11) și (12) rezultă că r_j este suma tuturor termenilor cu valori cunoscute din șirul logaritmilor dați de relațiile (9), în vreme ce termenii $t_{j,m} = \partial f_j / \partial \alpha_m$ iau fie valoarea 1, fie valoarea 0, după cum necunoscuta α_m se află sau nu printre termenii a_{ja} , b_{jb} , c_{jc} , ... ai relației (11).

Cu aceste precizări, funcția g care trebuie minimizată, dată de relația (4), devine:

Pentru ca funcția g să aibă un minim este necesar ca toate derivatele parțiale în raport cu variabilele independente $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ să se anuleze. Se obține astfel un sistem linear de s ecuații cu s necunoscute:

Introducând relația (12) în relația anterioară se obține sistemul:

Pentru ca acest sistem să fie determinat este necesar ca numărul necunoscutelor s să nu depășească numărul k_{ind} al rapoartelor de transmitere independente ce se pot realiza prin inserierea unităților structurale, adică $s \leq k_{ind}$.

Sistemul (15) poate fi scris și sub forma matriceală:

în care coeficienții necunoscutelor $[A]$ și termenii liberi $[B]$ se pot determina cu relațiile:

Rezolvarea sistemului (16), $[\alpha] = [A]^{-1} \cdot [B]$, conduce la stabilirea valorilor care permit cea mai bună aproximare a rapoartelor de transmitere dorite în sensul celor mai mici pătrate, obținându-se mai întâi logaritmi rapoartelor de transmitere structural realizabile, iar apoi, cu ajutorul relațiilor (9), adevăratele lor valori.

Pentru a se putea lucra efectiv cu relațiile prezentate este necesar să fie cunoscute ponderile p_j . Autorii recomandă ca aceste ponderi să fie chiar probabilitățile de utilizare ale treptelor.

Pentru aceasta pot fi utilizate diagrame de genul celor din Figura 2, capabile să valorifice datele statistice ale unor construcții cu destinații apropiate, care au dat satisfacția maximă în exploatare.

REZULTATE

Pentru a facilita înțelegerea mai ușoară a algoritmului, în continuare se va prezenta un exemplu de calcul.

Se va presupune un tractor agricol, pentru care va fi destinată o cutie de viteze cu 12 trepte. Se dorește ca la turația nominală a motorului (de exemplu 2200 rpm)

transmission to ensure the rated working speeds v_j indicated in the Table 1 (from 2.1 km/h to 37.7 km/h). For a better representation of the wanted tractor's operation mode, in the Figure 3 the red diamonds indicate these rated working speeds, and the blue diamonds indicate the ones corresponding to the engine maximal torque speeds (for example 1500 rpm).

It will be considered further that this transmission will be made combining in-series a main-gearbox (the structural unit a , with $k_a=4$ forward speeds) and a range-box (the structural unit b , with $k_b=3$ forward speeds). The gears' combination mode of the two units a and b it is also considered known and is presented in the Table 1 for all $k=k_a \cdot k_b=4 \cdot 3=12$ gears (different colours were used in the table for the 3 ranges: yellow – low gears, green – medium gears, blue – high gears).

The weights required for calculation are also in Table 1. Compared with the weights of the low gears, the ones of the gears in the normal working range (medium gears) were taken 3 times bigger and the ones of the high gears (used primarily for transport), 2 times bigger.

Starting from the tractor's rated speed v_j and remembering the gear ratio is inverse proportional with v_j , the wanted gearbox ratios w_j (Table 1) were computed considering the eleventh gear ratio $i_{11}=i_{a3} \cdot i_{b3}=1$. For that, in this example it was assumed direct drive in the third gear of the unit a ($i_{a3}=1$) and also direct drive in the third gear of the unit b ($i_{b3}=1$).

By this, from the $k_a+k_b=4+3=7$ gear ratios of the a și b units will remain to be determined $s=5$ ratios ($i_{a1}, i_{a2}, i_{a4}, i_{b1}, i_{b2}$). The logarithms of these ratios are the unknowns $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ (the independent variables considered by the least squares method). This number is smaller than 6, the value resulting from the relationship (2), which gives the maximal number of the unknowns which may be determined in the case of this geartrain.

Because the aggregate-gearbox ratio is obtained by the multiplication of the structural-units ratios ($i=ia \cdot ib$), the functions f appearing in the equation (13) are linear combinations (sums) of the unknowns $\alpha_1, \dots, \alpha_5$. All these functions are presented in the Table 2. In the same table are also presented the constants r_j from the equations (12), and the terms $t_{j,n}$ ($n=1,2, \dots, 5$), which allow the calculus of the matrix A with the equation (17) and of the vector B with the equation (18).

Solving the equations system (16) one obtains the achievable gear-ratios. These are shown in the penultimate column of the Table 2 and can be compared with the desired gear ratios listed in Table 1. The resulting errors are also shown in the last column of Table 2.

această transmisie să asigure vitezele de lucru nominale v_j indicate în Tabelul 1 (între 2,1 km/h și 37,7 km/h). Pentru o mai bună reprezentare a modului dorit de lucru al tractorului, în Figura 3 romburi roșii indică aceste viteze nominale, iar romburi albastre le indică pe cele care corespund turației de cuplu maxim a motorului (de exemplu 1500 rpm).

Se va considera în continuare că această transmisie se va realiza inseriind o cutie de viteze de bază (unitatea structurală a , cu $k_a=4$ trepte de mers înainte) și un reductor de gamă (unitatea structurală b , cu $k_b=3$ trepte de mers înainte). Modul de combinare a treptelor celor două unități a și b se consideră de asemenea cunoscut și este prezentat în Tabelul 1 pentru toate cele $k=k_a \cdot k_b=4 \cdot 3=12$ trepte (în tabel s-au folosit culori diferite pentru cele 3 game: galben – trepte lente; verde – trepte medii; albastru – trepte rapide).

Ponderile necesare calculului se găsesc de asemenea în Tabelul 1. Față de ponderile treptelor lente, pentru treptele din gama normală de lucru (trepte medii) s-au adoptat valori de 3 ori mai mari, iar pentru treptele rapide (folosite cu precădere la transport), de 2 ori mai mari.

Pornindu-se de vitezele nominale ale tractorului v_j și reamintindu-se că raportul de transmitere este invers proporțional cu v_j , rapoartele dorite ale cutiei de viteze w_j (Tabelul 1) au fost calculate considerând în treapta a unsprezecea un raport $i_{11}=i_{a3} \cdot i_{b3}=1$. Pentru aceasta, în acest exemplu s-a presupus priză directă în treapta a treia a unității a ($i_{a3}=1$) și tot priză directă în treapta a treia a unității b ($i_{b3}=1$).

Prin aceasta, din cele $k_a+k_b=4+3=7$ rapoarte de transmitere ale unităților a și b vor rămâne de determinat $s=5$ rapoarte de transmitere ($i_{a1}, i_{a2}, i_{a4}, i_{b1}, i_{b2}$). Logaritmiile acestor rapoarte sunt necunoscutele $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ (variabilele independente considerate de metoda celor mai mici pătrate). Acest număr este mai mic decât 6, valoare care rezultă din relația (2), cea care dă numărul maxim al necunoscutelor ce ar putea fi determinate în cazul acestei transmisii.

Deoarece raportul de transmitere al cutiei de viteze se obține prin înmulțirea rapoartelor de transmitere ale unităților structurale ($i=ia \cdot ib$), funcțiile f care apar în ecuația (13) sunt combinații lineare (sume) ale necunoscutelor $\alpha_1, \dots, \alpha_5$. Toate aceste funcții sunt prezentate în Tabelul 2. Tot în acest tabel sunt prezentate și constantele r_j din ecuațiile (12), ca și termenii $t_{j,n}$ ($n=1,2, \dots, 5$), care permit calculul matricei A cu ecuația (17) și a vectorului B cu ecuația (18).

Rezolvând sistemul de ecuații (16) se obțin rapoartele de transmitere realizabile. Acestea sunt prezentate în penultima coloană a Tabelului 2 și pot fi comparate cu rapoartele dorite, înscrise în Tabelul 1. Erorile rezultate sunt arătate în ultima coloană a Tabelului 2.

Table 1 / Tabelul 1

Gear / Treapta	Weight / Pondere	Speed / Viteza	Wanted ratio / Raport dorit	Gear of unit a / Treapta unit. a	Gear of unit b / Treapta unit. b	
j	p_j	v_j [km/h]	w_j			
1	1	0.042 / 0,042	2.1 / 2,1	12.33 / 12,33	1	1
2	1	0.042 / 0,042	3.1 / 3,1	8.36 / 8,36	2	1
3	1	0.042 / 0,042	4.2 / 4,2	6.17 / 6,17	3	1
4	3	0.125 / 0,125	5.1 / 5,1	5.08 / 5,08	1	2
5	1	0.042 / 0,042	6.3 / 6,3	4.11 / 4,11	4	1
6	3	0.125 / 0,125	7.6 / 7,6	3.41 / 3,41	2	2
7	3	0.125 / 0,125	10.6 / 10,6	2.44 / 2,44	3	2
8	2	0.083 / 0,083	12.4 / 12,4	2.09 / 2,09	1	3
9	3	0.125 / 0,125	15.6 / 15,6	1.66 / 1,66	4	2
10	2	0.083 / 0,083	18.2 / 18,2	1.42 / 1,42	2	3
11	2	0.083 / 0,083	25.9 / 25,9	1	3	3
12	2	0.083 / 0,083	37.7 / 37,7	0.69 / 0,69	4	3

Table 2 / Tabelul 2

Gear / Treapta	ln(ia _j)	ln(ib _j)	Fuction / Funcția	Known term / Termen cunoscut	ln(w _j)	Terms for matrices A and B / Termeni pentru matricele A și B					Ratio / Raport	Error / Eroare
						t _{j,1}	t _{j,2}	t _{j,3}	t _{j,4}	t _{j,5}		
j	a _{ja}	b _{jb}	f _j	r _j	x _j	t _{j,1}	t _{j,2}	t _{j,3}	t _{j,4}	t _{j,5}	i _j	err _j [%]
1	α ₁	α ₄	α ₁ +α ₄	0	2.512 / 2,512	1	0	0	1	0	12,51 / 12,51	-1.44 / -1,44
2	α ₂	α ₄	α ₂ +α ₄	0	2.123 / 2,123	0	1	0	1	0	8.45 / 8,45	-1.53 / -1,53
3	ln(ia ₃)	α ₄	α ₄	ln(ia ₃)=0	1.819 / 1,819	0	0	0	1	0	6.01 / 6,011	2.55 / 2,55
4	α ₁	α ₅	α ₁ +α ₅	0	1.625 / 1,625	1	0	0	0	1	5.07 / 5,07	0.26 / 0,26
5	α ₃	α ₄	α ₃ +α ₄	0	1.414 / 1,414	0	0	1	1	0	4.11 / 4,11	-0.01 / -0,01
6	α ₂	α ₅	α ₂ +α ₅	0	1.226 / 1,226	0	1	0	0	1	3.42 / 3,42	-0.41 / -0,41
7	ln(ia ₃)	α ₅	α ₅	ln(ia ₃)=0	0.893 / 0,893	0	0	0	0	1	2.43 / 2,43	0.42 / 0,42
8	α ₁	ln(ib ₃)	α ₁	ln(ib ₃)=0	0.737 / 0,737	1	0	0	0	0	2.08 / 2,08	0.33 / 0,33
9	α ₃	α ₅	α ₃ +α ₅	0	0.507 / 0,507	0	0	1	1	0	1.67 / 1,67	-0.27 / -0,27
10	α ₂	ln(ib ₃)	α ₂	ln(ib ₃)=0	0.353 / 0,353	0	1	0	0	0	1.41 / 1,41	1.18 / 1,18
11	ln(ia ₃)	ln(ib ₃)	0	ln(ia ₃)+ln(ib ₃)=0	0	0	0	0	0	0	1	0
12	α ₃	ln(ib ₃)	α ₃	ln(ib ₃)=0	-0.375 / -0,375	0	0	1	0	0	0.68 / 0,68	0.41 / 0,41

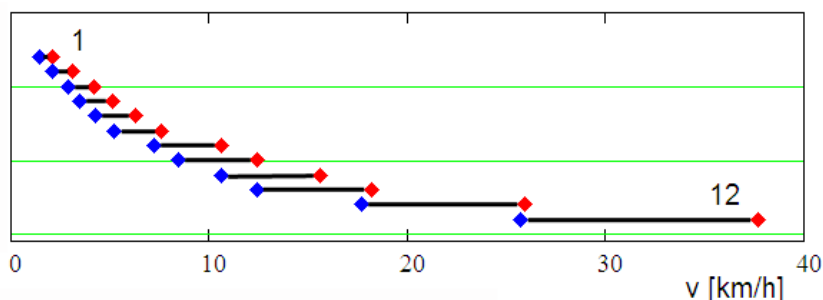


Fig. 3 – Working speed for a 12-gear hypothetical farm tractor / Vitezele de lucru pentru un tractor agricol ipotetic cu 12 trepte de viteză

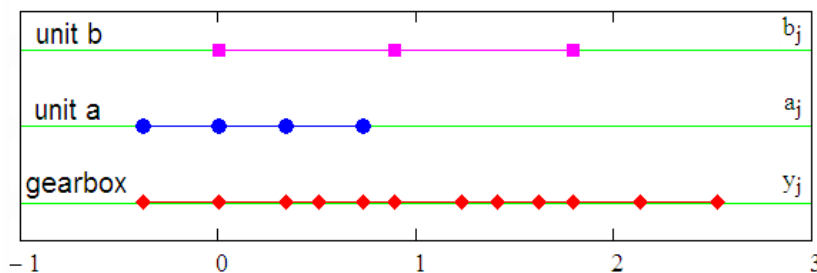


Fig. 4 – Positions on a logarithmic axis of the computed gear ratios of the structural units and gearbox / Poziționarea pe o axă logaritmică a rapoartelor de transmitere calculate ale unităților structurale și cutiei de viteze

Finally, starting from the logarithms having now the known values $\alpha_1, \dots, \alpha_5$, the gear ratios $ia_1, ia_2, ia_4, ib_1, ib_2$ of the structural units will be calculated with the equations (9). In Figure 4 are positioned on a logarithmic axis the gear ratios of the structural units and gearbox (the markers from the right side correspond to the first gear).

CONCLUSIONS

The paper presents a mathematical, objective criterion for the assessment of how a set of gear ratios (of a complex geartrain, obtained by the in-series combination of some structural units) is close to a desired set of values. Based on this, it was obtained an algorithm which, in the case of given kinematic scheme, allows either to obtain the structural-achievable ratios or to choose the most suitable ratios sequence of several sets of proposed-values.

The algorithm can be used not only to obtain the structural-achievable ratios but also to determine their real (actual) values. In this case the procedure will be applied in several stages:

- one specifies the desired (ideal) gear ratios for the analyzed geartrain;
- one adopts values for maximum $k - k_{ind} = N-1$ ratios

În final, pornind de la logaritmi cu valorile cunoscute acum $\alpha_1, \dots, \alpha_5$, rapoartele de transmitere $ia_1, ia_2, ia_4, ib_1, ib_2$ ale unităților structurale se vor calcula cu relațiile (9). În Figura 4 sunt poziționate pe o axă logaritmică rapoartele de transmitere ale unităților structurale și ale întregii cutii de viteze (marcările din partea dreaptă corespund primei trepte).

CONCLUZII

Lucrearea prezintă un criteriu matematic, obiectiv, de apreciere a modului în care un set de rapoarte de transmitere (realizate de o transmisie complexă, obținută prin înscrierea mai multor unități structurale) se apropie de un set de valori dorite. Pe baza acestuia s-a realizat un algoritm care, în cazul unei scheme cinematice date, permite fie obținerea rapoartelor realizabile practic, fie alegerea celui mai potrivit șir de rapoarte dintre mai multe seturi de valori propuse.

Algoritmul poate fi întrebuițat nu numai pentru obținerea rapoartelor de transmitere structural realizabile ci și pentru stabilirea valorilor lor reale. În acest caz procedeul se va aplica în mai multe etape:

- se stabilesc rapoartele de transmitere dorite (ideale) pentru transmisia analizată;
- se adoptă valori pentru maximum $k - k_{ind} = N-1$ rapoarte

(at least one for $N-1$ structural units of the N component units);

- with the presented algorithm, one determines a first sequence of structurally-achievable ratios;
- one adopts the numbers of teeth for the most used gear, so that its real gear-ratio to approach as much as possible to the one structurally-achievable;
- in the sequence of the wanted (ideal) values one replaces the existent gear ratio value with the one calculated with the adopted numbers of teeth;
- in the order of the gears' use-probability, one repeats the last three steps, setting one by other the real gear ratios.

The algorithm can be used also if a structural unit contains only a single gear (such as the final drive). It appears, therefore, the possibility to choose the ratio of an adjustment speed-reducer or to modify the ratio of the final-drive so that to use with high efficiency a given gearbox.

The presented procedure was transposed into a computer program. The comparisons made between the results obtained by computation and those of existent tractor and truck-geartrains were particularly encouraging.

REFERENCES

- [1] Bobancu S. (1977) - *Contributions to the structural and numerical analysis and synthesis of the mechanisms with mobile-axis gearwheels*, Doctoral thesis, University of Brasov, Romania;
- [2] Ciolan G., Preda I., Peres G. (1998) - *Automobile Transmissions*, Didactical and Pedagogical Publishing House, ISBN 973-30-5875-0, Bucharest, Romania;
- [3]. Mitschke M., Wallentowitz H. (2004) - *Dynamik der Kraftfahrzeuge*, Springer, ISBN 3-540-42011-8, Berlin;
- [4]. Naunheimer H., Bertsche B., Ryborz J., Novak W. (2011) - *Automotive Transmissions: Fundamentals, Selection, Design and Application*, Springer, ISBN 978-3-642-16213-8, Berlin;
- [5] Nastasoiu S., Andreescu C., Popescu S., Fratila G., Cristea D. (1983) - *Tractors*, Didactical and Pedagogical Publishing House, Bucharest.

de transmitere (cel puțin unul pentru $N-1$ unități structurale din cele N unități componente);

- cu algoritmul prezentat, se determină o primă serie de rapoarte structural realizabile;
- se adoptă numerele de dinți pentru angrenajul cel mai întrebuițat, astfel încât raportul său real de transmitere să se apropie cât mai mult de cel structural realizabil;
- în șirul valorilor dorite (ideale) se înlocuiește valoarea existentă a raportului de transmitere cu cea calculată cu numerele de dinți adoptate;
- în ordinea probabilității de întrebuițare a angrenajelor, se repetă ultimii trei pași, stabilindu-se pe rând rapoartele lor de transmitere reale.

Algoritmul poate fi utilizat și dacă o unitate structurală conține doar un angrenaj singular (cum ar fi reductorul central). Apare deci posibilitatea de a alege raportul de transmitere al unui reductor de adaptare sau de a modifica raportul de transmitere al unui reductor central în așa fel încât să se utilizeze cu eficiență maximă o cutie de viteze dată.

Mersul de calcul descris a fost transpus într-un program de calcul. Comparațiile efectuate între rezultatele obținute prin calcul și cele aparținând unor transmisii existente de tractoare și autocamioane au fost deosebit de încurajatoare.

BIBLIOGRAFIE

- [1]. Bobancu S. (1977) - *Contribuții la analiza și sinteza structurală și numerică a mecanismelor cu roți dințate cu axe mobile*, Teza de doctorat, Universitatea din Brașov, România;
- [2] Ciolan G., Preda I., Pereș G. (1998) - *Cutii de viteze pentru automobile*, Ed. Didactică și Pedagogică, ISBN 973-30-5875-0, București - România;
- [3]. Mitschke M., Wallentowitz H. (2004) - *Dinamica autovehiculelor*, Springer, ISBN 3-540-42011-8, Berlin;
- [4]. Naunheimer H., Bertsche B., Ryborz J., Novak W. (2011) - *Transmisii pentru autovehicule - Fundamente, selecție, proiectare și utilizări*, Springer, ISBN 978-3-642-16213-8, Berlin;
- [5]. Năstăsoiu S., Andreescu C., Popescu S., Frațilă G., Cristea D. (1983) - *Tractoare*, Ed. Didactică și Pedagogică, București - România.