OPTIMIZAREA CALCULUI BARELOR CU PEREŢI SUBŢIRI

Prep. drd. ing. Deaconu Ovidiu

1. GENERALITĂŢI

Barele cu perţi subţiri sunt înâlnite frecvent în structurile de rezistenţă ale clădirilor, podurilor, vehiculelor sau a navelor, utilizarea lor fiind justificată datorită unui consum redus de material, deci foarte economice.

Secţiunea transversală a unei bare cu perţi subţiri este dezvoltată în lungul unei aşa numită axă mediană a secţiunii (fig.1). În orice punct al său axa mediană împarte în jumătate grosimea "t" a peretelui barei, măsurată pe normala la axa mediană. La barele cu pereţi subţiri grosimea peretelui "t" este redusa comparativ cu lungimea axei mediane, precum şi în raport cu oricare din dimensiunile globale ale secţiunii (laţime, lungime sau înălţime), orientativ: $t/(l_1,l_2,l_3)<1/10$.

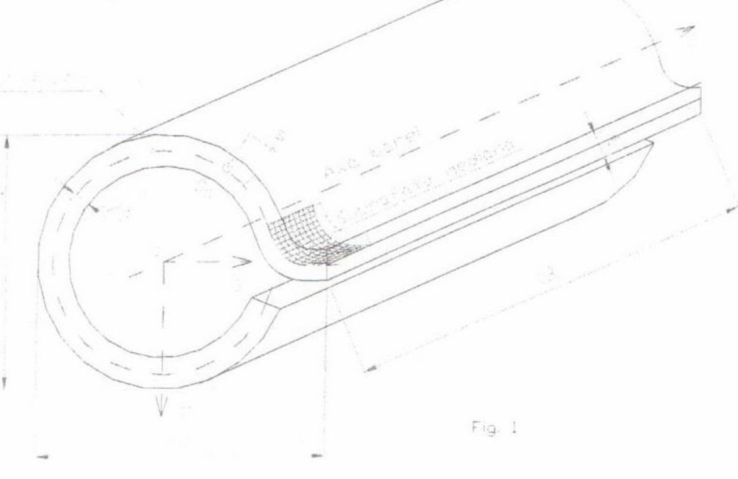

Fig. 1

Locul geometric al centrelor de greutate ale sectiunii transversale, reprezinta axa barei. Barele prismatice au axa, o dreapta, si orice sectiune transversala, normala la axa, constanta in lungul barei.Prin translatia axei mediane a sectiunii in lungul barei se obtine axa mediana a barei cu pereti subtiri.

Axa mediană poate fi o curbă deschisă şi atunci bara se numeşte cu pofil *deschis sau simplu conexă (fig.2: a, b, c, d), sau o curbă închisă, când bara se numeşte cu secţiune închisă sau dublu conexă (fig.2: e, f), (multiconexă) (fig.2: g).*

* Universitatea Transilvania Brasov, Facultatea de Constructii, Catedra de constructii si Instalatii pentru constructii, E-mail: ovideaconu@yahoo.ro

Raportând bara la un sistem cartezian (fig. 1) cu axa 0x suprapusă peste axa barei şi axele 0y şi 0z în planul secţiunii transversale, geometria barelor cu pereţi subţiri prismatice este complet determinată de ecuaţia axei mediane din secţiunea trasversală şi de legea variaţiei grosimii "t". Cel mai des utilizate sunt ecuatiile parametrice date de arcul s, măsurat dintr-o origine precizată 0s:

$$y = y(s), \ z = z(s), \ t = t(s).$$

Calculul pentru asfel de tipuri de bare spaţiale cu profil simplu conex şi dublu conex se bazează pe teoria barelor cu pereţi subţiri a lui V.Z. Vlasov. La barele cu profil dublu conex, teoria a fost dezvoltată de către S.U. Benscoter prin introducerea funcţiei de deplanare "f". Necesitatea unei teorii de calcul diferită de cea a barelor studiate de Rezistenţa materialelor se datorează comportării particulare a barelor cu pereţi subţiri sub acţiunea forţelor, fapt ce impune adoptarea unui model de calcul adecvat.

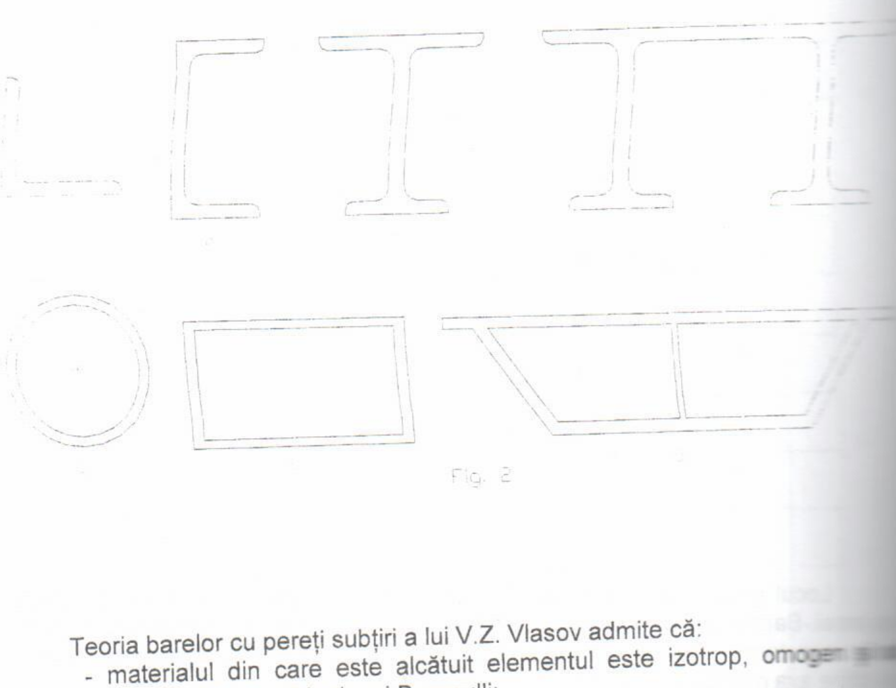

Fig. 2

Teoria barelor cu pereţi subţiri a lui V.Z. Vlasov admite că:

- materialul din care este alcătuit elementul este izotrop, omogen ... valabile legile lui Hooke şi Bernoulli;
- eforturile unitare tangenţiale din răsucire liberă, variază liniar pe ... peretelui;
- la profilele simplu conexe se neglijează deformaţiile de lunecare ... liniei mediane a secţiunii;
- conturul secţiunii transversale este indeformabil în ... Indeformabilitatea transversală a barelor este asigurată ... transversale. În afara planului său, sectiunea transversală ... rigiditate mică astfel încât pot apărea deformaţii şi deplasări ...

La barele cu pereți subțiri cu profil dublu conex, eforturile unitare tangențiale [illegible] sunt aproape de același ordin de mărime cu eforturile unitare tangențiale din [illegible] liberă și influientează mult valoarea deformațiilor. Pentru a ține seama de [illegible] s-a introdus fucția de deplanare "f" ce depinde de secțiunea curentă de pe [illegible] barei și caracterizează istensitatea deplanării acestei secțiuni. Funcția de [illegible] se determină dint-un sistem de doua ecuații diferențiale ce leagă momentul [illegible] Mrz, de unghiul de răsucire φ(z) și funcția de deplanare f(z). Calculul barelor [illegible] subțiri cu profil dublu conex se face admitând ipotezele de la profilul simplu [illegible] care se mai adaugă:

- eforturile unitare normale sectoriale sunt proporționale cu coordonata sectorială și cu derivata a doua a funcției de deplanare f(z);
- eforturile unitare tangențile sectoriale sunt constante pe grosimea peretelui.

Sub acțiunea torsiunii barele care nu au secțiune circulară sau inelară, [illegible] transversală se deplanează (fig.3: a). Deplanarea este mai accentuata la o [illegible] cu pereți subțiri fața de deplanarea unei bare cu secțiune plină. Deplanarea este [illegible] evidentă la solicitarea unei bare, simplu conexă, cu forțe concentrate, paralele cu [illegible] barei. Spre exemplificare, considerăm o bară cu pereți subțiri care are secțiunea transversală în forma de "I" (fig.3: b). Asupra acestei bare acționează două forțe la [illegible] secțiunii, paralele cu axa, care se reduc în centrul de greutate al secțiunii la un [illegible] axial N = 2 · P. La bara cu secțiune plină, doar starea de eforturi locală, din [illegible] secțiunii pe care se aplică cele două forțe, este influiențată de modul [illegible] de distribuție a acțiunii. Se observă însă că la bara cu pereți subțiri în formă de [illegible] aplicând cele două forțe, acestea produc încovoierea tălpilor pe toată lungimea barei [illegible] în același timp, datorită deplasărilor în sensuri opuse ale tălpilor, torsiunea barei, [illegible] de deplanare.

Fig. 3

Conform acestui exemplu, dar și a altora similare, se poate scoate în evidență [illegible] că ipoteza secțiunilor plane, pentru bare cu pereți subțiri, nu poate fi utilizată [illegible] orice tip de solicitare. În același timp, nici principiul efectului local al lui Saint-Venant nu mai are valabilitate.

În locul acestor principii de calcul, trebuie definite altele noi. Calculul se face pe baza caracteristicilor sectoriale.

2. CARACTERISTICI GEOMETRICO-SECTIONALE

Arie sectorială şi arie sectorială principala

Fie secţiunea transversală a unei bare cu pereţi subţiri, deschise (fig. 4) şi sistemul de axe principal central y0z. Se adoptă ca sens pozitiv pentru măsurarea arcelor de axa mediana a secţiunii sensul orar, cu o origine care se presupune extremitatea axei. Se alege un punct "S" pe axa mediană, numit punct sectorial şi un punct $C(y_c, z_c)$ în planul z0y, numit pol.

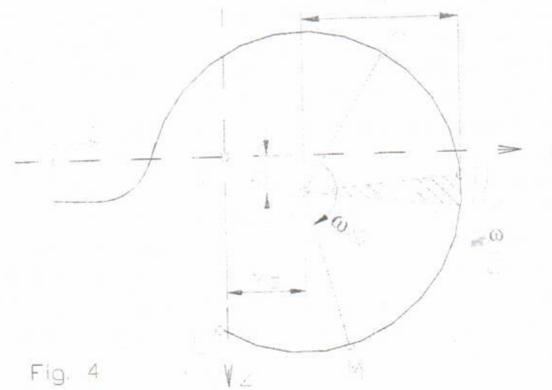

Fig. 4

Prin definiţie, aria sectorială a unui punct M de pe axa mediana în raport cu polul C este:

$$\omega(s) = \int_{SM} h ds$$

unde: $\omega(s)$ = aria sectorială

h = distanţa de la polul C la tangenta dusă în punctul curent M

ds = o porţiune de lungime din axa mediană.

Aria sectorială reprezintă dublul ariei delimitată de raza polară CS a originii, raza polară CM a punctului considerat şi de porţiunea din axa mediană SM. Aria sectorială are unitatea de măsură: $[L^2]$ şi este pozitivă dacă trecerea de la S la M a razei polare se face în sens orar.

Fiecărui punct de pe axa mediană îi corespunde o valoare proprie a ariei sectoriale, care depinde de polul C şi de poziţia relativă, faţă de punctul sectorial S, de pe axa mediana. Din acest motiv aria sectorială poate fi privita ca o coordonată a punctului respectiv, numită coordonată sectorială. Punctului sectorial nul S îi corespunde o coordonată sectorială nulă.

Prin reprezentarea grafică a legii de variaţie $\omega(s)$, se obţine diagrama ω. Pe porţiuni unde h este constant, ω are o variaţie liniară.

Aria sectorială principală se obține atunci când polul (C) şi punctul sectorial nul (S) satisfac următoarele relații:

$$\int_A y\omega dA = 0$$

$$\int_A z\omega dA = 0 \qquad \text{unde: A = aria secțiunii considerate.}$$

$$\int_A \omega dA = 0$$

Polul pentru care sunt îndeplinite aceste condiții se numeşte pol principal iar punctul sectorial nul se numeşte punct sectorial nul principal.

La barele cilindrice centrul de lunecare-torsiune al secțiunii coincide polul principal.

Ținând cont de restricțiile ariei sectoriale principale, se pot deduce coordonatele polului principal C în funcție de coordonatele unui pol arbitrar ales B:

$$z_c = z_b - \frac{1}{I_z} \cdot \int_A y\omega_b dA$$

$$y_c = y_b + \frac{1}{I_y} \cdot \int_A z\omega_b dA$$

unde: z_b, y_b = coordonatele polului B

I_z, I_y = momentele de inerție axiale ale sectiunii

ω_b = arie sectorială a polului arbitrar B

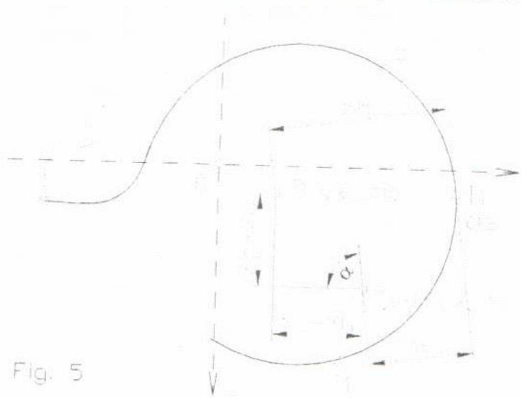

Fig. 5

Satisfacerea ultimei condiții conduce la determinarea punctului sectorial nul principal, în raport cu polul principal C şi un punct sectorial nul arbitrar S:

$$\omega_{sp} = \frac{1}{A} \cdot \int_A \omega_s dA$$

unde: ω_{sp} = coordonata sectorială a punctului P când s-a considerat un punct sectorial nul, punctul S

A = aria sectiunii considerate

ω_s = aria sectoriala in raport cu polul principal C, calculata cu punctul sectorial nul arbitrar S.

La secțiuni simetrice, polul principal şi punctul sectorial nul principal se găsesc pe axa de simetrie. Dacă există mai multe puncte a căror arie sectorială este egala cu

ω_{sp} dat de relația anterioară, se va alege dintre acestea ca punct sectorial nul principal punctul cel mai apropiat de polul principal.

Pentru bare cu secțiune închisă, trebuie definită lungimea redusă a arcului cuprinsă între punctele S şi M pe axa mediană sau pe tot conturul închis Γ, prin relațiile:

$$\bar{s} = \int_{SM} \frac{ds}{t} \qquad \bar{L} = \oint_{\Gamma} \frac{ds}{t}$$

unde: $\bar{s}$ = lungimea redusă a arcului

$\bar{L}$ = lungimea redusă a conturului

t = grosimea peretelui barei

Aria sectorială a conturului închis Γ, devine:

$$\Omega = \oint_{\Gamma} h \cdot ds$$

care este egală cu dublul ariei interioare A_i a suprafeței delimitată de axa mediană a secțiunii:

$$\Omega = 2 \cdot A_i$$

Aria sectorială generalizată $\bar{\omega}(s)$, cu polul B şi punctul sectorial nul S arbitrar se defineşte prin relația:

$$\bar{\omega}(s) = \int_{SM} h ds - \frac{\Omega}{\bar{L}} \cdot \bar{s} = \omega - \frac{\Omega}{\bar{L}} \cdot \bar{s}$$

unde: h = distanța de la polul C la tangenta dusă în punctul curent al axei

Ω = aria sectorială a conturului închis

$\bar{L}$ = lungimea redusă a conturului

ω = aria sectorială, când conturul se consideră deschis.

Aria sectorilă generalizată este principală, dacă sunt satisfăcute condițiile:

$$\oint \bar{\omega} \cdot z dA = 0$$

$$\oint \bar{\omega} \cdot y dA = 0$$

$$\oint \bar{\omega} dA = 0$$

Ținând cont de restricțiile ariei sectoriale generalizate principale, se pot determina coordonatele polului principal C în funcție de coordonatele unui pol arbitrar ales B:

$$z_c = z_b - \frac{1}{I_z} \cdot \int_A y \bar{\omega}_b dA$$

$$y_c = y_b + \frac{1}{I_y} \cdot \int_A z \bar{\omega}_b dA$$

unde: z_b, y_b = coordonatele polului B

$_z$, I_y = momentele de inerție axiale ale secțiunii

= arie sectorială generalizată a polului arbitrar B

Moment static sectorial, moment de inerție sectorial moment de inerție ...

Prin definiție momentul static sectorial, se notează cu S_ω, şi are expresia pentru cele două tipuri de secțiuni (deschise sau închise):

, respectiv

Momentul static sectorial se măsoară în [L^4] şi este o funcţie de coordonatele punctelor ce definesc limitele de integrare.

Momentul de inertie sectorial I_ω se defineste prin relatiile, corespunzatoare celor doua tipuri de sectiuni:

, respectiv

Momentul de inerţie sectorial are dimensiunea [L^6] şi depinde de aria secţiunii. Momentul de inerţie dirijat I_d se defineşte prin relaţia:

şi se măsoară în [L^4]

BIBLIOGRAFIE:

1. O. Bogdan: Rezistenţa materialelor;
2. I. Szàva: Rezistenţa materialelor;
3. A. Petre, M. Atanasiu: Bare cu pereţi subţiri;
4. D. Mateescu: Construcţii metalice.